

Fondamenti di Automatica

Antonio Bicchi

Università di Pisa

Versione Provvisoria del 19 Aprile 2002.

Alcune parti della dispensa sono in corso
di integrazione o riscrittura.

Si consiglia di procedere ad aggiornarle circa mensilmente.

Contents

1	Contenuti del Corso	5
1.1	Equazioni dei sistemi dinamici	5
1.2	Descrizione matematica di un sistema dinamico	10
1.3	Esempi	11
1.4	Più ingressi e più uscite	12
1.5	Stati, ingressi, uscite	13
1.6	Causalità, Stazionarietà, Linearità	14
1.7	Proprietà dei sistemi lineari	16
1.8	Cambiamenti di coordinate	17
1.9	Linearizzazione approssimata	25
2	Esistenza e Unicità delle Soluzioni	27
2.1	Soluzioni di equilibrio	27
2.2	Soluzioni dei sistemi lineari	28
2.3	Analisi modale dei sistemi LTITC	36
2.4	Analisi modale dei sistemi LTITD	37
2.5	Instabilità numerica della forma di Jordan	38
3	Stabilità	39
3.1	Teoremi di Lasalle e Krasovskii	46
3.2	Altre estensioni	50
3.3	Dimostrazione del metodo di linearizzazione	53

4	Criteri algebrici di stabilità.	60
4.1	Criterio di Routh	60
4.2	Criterio di Kharitonov	63
4.3	Criterio di Gershgorin	64
4.4	Sistemi a tempo discreto	65
4.5	Esempio	65
4.6	Criterio di Mikhailov	66
5	Raggiungibilità e Controllabilità	69
5.1	Insieme raggiungibile per un sistema LTITC	69
5.2	Insieme raggiungibile per un sistema LTITD	72
5.3	Controllabilità all'origine	73
5.4	Pianificazione ottima	75
5.5	Raggiungibilità di sistemi non LTI	77
5.6	Approccio geometrico: Sottospazi invarianti	79
5.7	Sistemi LTI: sottosistemi raggiungibili e non	80
5.8	Verifiche dirette di Raggiungibilità	82
5.9	Forma canonica di controllo	85
5.10	Retroazione degli stati	89
5.11	Richiami di Algebra Lineare	95
5.12	Altre applicazioni della SVD	99
6	Osservabilità e Ricostruibilità	100
6.1	Insieme indistinguibile per un sistema LTITC	101
6.2	Insieme inosservabile per un sistema LTITD	103
6.3	Ricostruibilità	104
6.4	Sistemi LTI: sottosistemi osservabili e non	106
6.5	Forma canonica di osservazione	109
6.6	Stima ottima	112
6.7	Scomposizione canonica	115
6.8	Osservabilità di sistemi non LTI	117
7	Sistemi LTI: Risposte Forzate e Calcolo Operazionale	118
7.1	La funzione impulso $-\delta$ di Dirac	125
7.2	Soluzione delle equazioni in forma di stato	127
7.3	Applicazione alla soluzione di ODE	129
7.4	Funzioni di Trasferimento e Coordinate	130
7.5	Antitrasformazioni	130
7.6	Antitrasformata Z: i primi campioni	134

8	Risposte forzate ad ingressi tipici	135
8.1	Risposte impulsive	135
8.2	Risposta al gradino	135
8.3	Risposte al gradino di sistemi del primo e secondo ordine	143
8.4	Risposta al gradino di sistemi del primo ordine	143
8.5	Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine	144
8.6	Risposte a segnali permanenti	149
8.7	Risposte dei sistemi lineari con Matlab	154
9	Diagrammi di Bode	172
9.1	Il contributo di K	173
9.2	Il contributo di $\frac{1}{(j\omega)^h}$	174
9.3	Il Contributo di $\frac{1}{1+j\omega\tau}$	175
9.4	Il Contributo di $1 + j\omega\tau'$	177
9.5	Coppia di poli complessi coniugati	178
9.6	Coppia di zeri complessi coniugati	182
9.7	Esempi	182
9.8	Formula di Bode	185
10	Banda passante, picco e pulsazione di risonanza	186
11	Diagrammi di Nyquist e Nichols	189
12	Connessione di Sistemi	192
12.1	Raggiungibilità e Osservabilità di Sistemi Connessi	195
13	Specifiche sui Sistemi Dinamici	197
13.1	Effetti della Retroazione	200
13.2	Specifiche di Stabilità	204
14	Studio Indiretto dei Sistemi in Retroazione	206
14.1	Stabilità dei Sistemi in Retroazione - Criterio di Nyquist	206
14.2	Esempio	209
15	Regolazione dei sistemi	212
15.1	Osservatore asintotico dello stato	213
15.2	Realizzazione di sistemi	214
15.3	Sintesi del regolatore	218
15.4	Retroazione delle uscite	219
15.5	Caso SISO: costruzione esplicita di un regolatore	222

16 Il metodo del luogo delle radici	225
16.1 Definizione del luogo delle radici	225
16.2 Equazioni del Luogo delle radici	226
16.3 Esempi	227
16.4 Proprietà del luogo delle radici	227
16.5 Contorno delle radici	229

1 Contenuti del Corso

Questo corso si occupa di studiare sistemi dinamici, che cioè evolvono la loro configurazione nel tempo, così come essi si trovano in natura o nei dispositivi ingegneristici.

Oltre a studiare il modo in cui questi sistemi si comportano quando lasciati a se stessi, ci interessa capire come è possibile influenzare il loro comportamento secondo le nostre finalità. Inoltre, vogliamo studiare come è possibile estrarre le migliori informazioni possibili sulle caratteristiche “interiori” di un sistema dinamico, quando solo alcuni fenomeni che lo riguardano possono essere misurati.

Evitando per il momento di dare una definizione formale di Sistemi Dinamici, ci richiamiamo alla nozione comune di “Sistema Dinamico” come insieme di elementi variabili, che evolvono in modo interdipendente secondo date leggi. Il concetto di S.D. è sviluppato induttivamente a partire dagli innumerevoli esempi di esperienza comune, tra cui si citano di solito la dinamica di un sistema meccanico massa–molla–smorzatore, o quella di un circuito elettrico RLC; la crescita/diminuzione delle popolazioni di specie animali in competizione, o le iterazioni di un algoritmo iterativo; il sistema di riscaldamento/condizionamento di un edificio, o il meccanismo di funzionamento di un riconoscitore di codici a barre.

Lo strumento fondamentale a nostra disposizione sarà il modello matematico di questi sistemi. Non tutti i problemi che coinvolgono sistemi sono matematizzabili in modo soddisfacente: d'altronde, la matematica è l'unico strumento che consente ad un ingegnere di valutare quantitativamente e obiettivamente le proprietà di un sistema.

Ci troveremo spesso perciò di fronte a *modelli matematici approssimati* di sistemi reali: sarà in questo caso necessario tenere conto di quanto i risultati del nostro studio approssimato permangano validi anche rispetto al vero sistema.

1.1 Equazioni dei sistemi dinamici

Tra tutti i sistemi dinamici, quelli di forse più immediata comprensione sono quelli descritti mediante *equazioni differenziali* o *equazioni alle differenze*, concetti già noti dalla analisi matematica e numerica.

Le Equazioni Differenziali Ordinarie (“O.D.E.”, in sigla) sono spesso usate per descrivere matematicamente le leggi fisiche che legano grandezze variabili in modo continuo in funzione di una sola variabile, tipicamente del tempo.

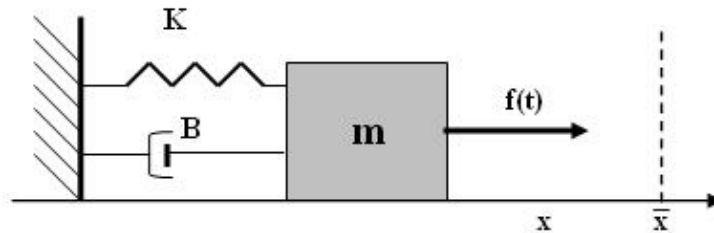
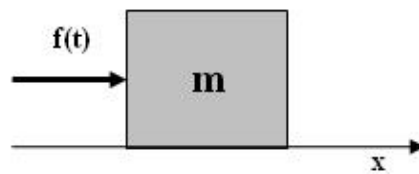
Esempio: Leggi di Newton, Hooke, Rayleigh

Corpo di massa m in posizione x sottoposto a una forza esterna variabile $f(t)$

$$f(t) = m\ddot{x}$$

ovvero

$$\ddot{x} = \frac{1}{m}f(t)$$



Se il corpo é collegato ad una molla di costante elastica (di Hooke) K , a riposo in posizione \bar{x} ,

$$\ddot{x} = -\frac{K}{m}(x - \bar{x}) + \frac{1}{m}f(t)$$

Se inoltre il corpo é collegato ad uno smorzatore viscoso di costante dissipativa (di Rayleigh) B ,

$$\ddot{x} = -\frac{B}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}(\bar{x} - x) + \frac{1}{m}f(t)$$

Esempio: Leggi di Ohm, Faraday, Henry

Caduta di tensione ai capi di una resistenza R

$$v(t) = i(t)R$$

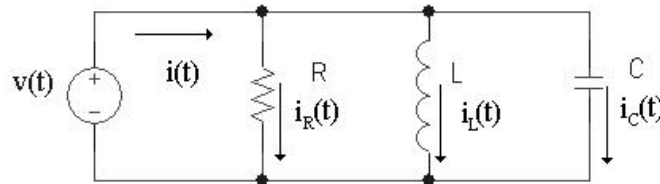
Corrente tra le armature di un condensatore di capacit  C :

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$$

Tensione ai capi di una induttanza L

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

La legge di Kirchoff (bilancio delle cadute di potenziale lungo le maglie, o delle correnti ai nodi) ci permette di scrivere le equazioni di un circuito. Ad esempio su un parallelo di R, C, L , con corrente totale $i(t) = i_R(t) + i_C(t) + i_L(t)$ e tensione $v(t)$



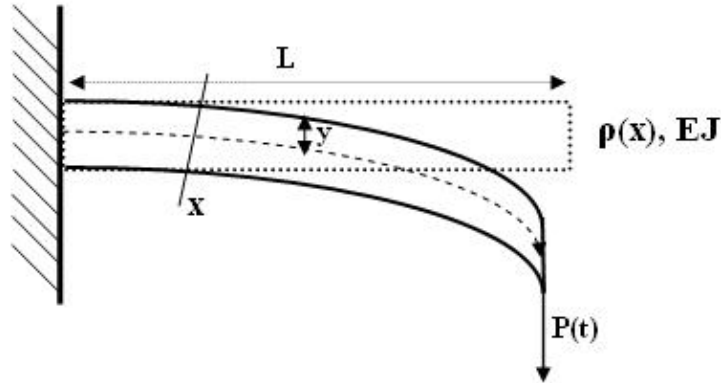
si ottiene

$$\frac{di(t)}{dt} = \ddot{v}C + \frac{\dot{v}}{R} + \frac{v}{L}$$

Le Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali (“P.D.E.”, in sigla) sono usate per descrivere matematicamente le leggi fisiche che legano grandezze variabili in modo continuo in funzione di due o più variabili, di cui tipicamente una è il tempo, e le altre sono variabili spaziali.

Esempio: Trave di Eulero-Bernoulli

Si consideri una trave snella di densità lineare $\rho(x)$, dove x è la distanza della generica sezione della trave da una estremità con $0 \leq x \leq L$, e sia y la variabile che individua lo scostamento trasversale del centro della sezione dalla posizione rettilinea di riposo: sarà in generale $y = y(x, t)$.



L'equazione di bilancio delle forze elastiche e di inerzia del tratto di trave generico è scritta

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

dove EJ è il modulo di resistenza a flessione.

Se la trave è incastrata ad un estremo, e libera all'altro ma soggetta a carico variabile di taglio $P(t)$, il sistema ha le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} y(0, t) = 0, & \quad \forall t; & \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, & \quad x = L, \forall t, \\ \frac{\partial y}{\partial x} = 0, & \quad x = 0, \forall t, & \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = P(t), & \quad x = L; \end{aligned}$$

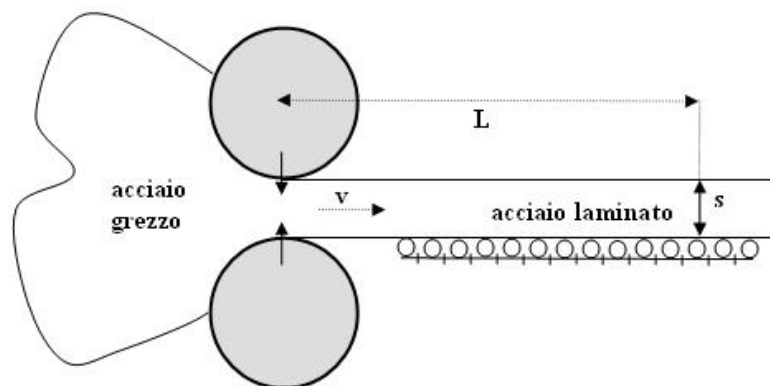
Un altro tipo di equazioni differenziali incontrate nelle applicazioni (in particolare quelle che comprendono trasporto di massa continua) sono le O.D.E. con termini di ritardo (o integro-differenziali). In questo caso la legge dinamica non dipende solo dai valori delle grandezze e delle loro derivate ad un istante t , ma anche da quelli di istanti precedenti (da un numero finito o anche infinito di istanti precedenti).

Esempio: Laminatoio per acciaio.

In un modello semplificato di laminatoio, la differenza tra la pressione istantanea $f(t)$ con cui i rulli premono sullo strato di materiale in stadio plastico ed il valore nominale della stessa pressione f_0 è proporzionale alla velocità con cui varia lo spessore della lastra.

La misura dello spessore della lastra stessa, che viene fatta allo scopo di controllare la qualità del prodotto e per intervenire sulla regolazione della pressione di laminazione, è compiuta tipicamente ad una distanza L dai rulli. Supponendo che la velocità di scorrimento della lastra laminata sia costante e pari a v , si avrà per lo spessore misurato s

$$\dot{s}(t) = \alpha(f(t - L/v) - f_0)$$



Le Equazioni alle Differenze (ordinarie o parziali) sono invece spesso usate per descrivere matematicamente le leggi che legano grandezze continue variabili in funzione di una (o piú) variabile indipendente discreta, che procede cioè “a salti”.

Esempio: Calcolo degli interessi bancari

Se si deposita in banca un capitale iniziale di valore $x(0)$, e il tasso di interesse annuo è $\alpha > 0$, la legge che esprime la crescita del capitale dall’anno t -esimo al successivo è semplicemente

$$x(t + 1) = \alpha x(t)$$

Perché il capitale aumenti, deve essere $\alpha > 1$.

La stessa legge si applica, solo in prima approssimazione però, alla crescita delle popolazioni, in cui il fattore di fertilità α regola la crescita geometrica.

Un modello piú dettagliato della **crescita di una popolazione** è dato dal modello a coorti (o generazioni). Si divide la popolazione in n gruppi di età comprese in un dato intervallo, ad es. 5 anni, e si indica con x_i il numero di individui vivi al tempo t nella i -esima coorte. In un intervallo di tempo, un numero di individui passa alla coorte $i + 1$ -esima pari a quelli che erano nella coorte i -esima, moltiplicato per un fattore $\beta_i < 1$ che tiene conto della mortalità all’età i -esima. Si ha quindi

$$x_{i+1}(t + 1) = \beta_i x_i(t), i = 2, \dots, n - 1$$

Resta da determinare $x_1(t + 1)$ dati tutti gli $x_i(t)$, cioè il numero dei nuovi nati in ogni intervallo. Poniamo che sia

$$x_1(t + 1) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \dots + \alpha_n x_n(t)$$

dove gli α_i sono i fattori di fertilità delle diverse età.

Esempio: Algoritmo di Newton–Raphson

L’algoritmo è usato per la soluzione di n equazioni algebriche nonlineari in n incognite del tipo $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Se la matrice jacobiana $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$ esiste in un punto $\mathbf{x}(t)$ (cioè se $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ è differenziabile), per lo sviluppo di Taylor al primo ordine si può scrivere

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t + 1)) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{J}(\mathbf{x}(t))(\mathbf{x}(t + 1) - \mathbf{x}(t))$$

Cercando di imporre che sia $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t + 1)) = 0$, si ottiene (laddove \mathbf{J} sia invertibile)

$$\mathbf{x}(t + 1) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{J}^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$$

1.2 Descrizione matematica di un sistema dinamico

Rivolgeremo il nostro studio ai sistemi rappresentati da eq. differenziali o alle differenze ordinarie di ordine n del tipo

$$\mathbf{F}(y(t), Dy(t), \dots, D^n y(t), u(t), Du(t), \dots, D^p u(t), t) = 0,$$

dove:

- $p \leq n$;
- nel caso delle ODE, t è la variabile indipendente che assume valori reali continui ($t \in \mathbb{R}$), e D è l’operatore differenziale totale rispetto a t , cioè $D^k y(t) = \frac{d^k}{dt^k} y(t)$. Questi sistemi si dicono “a tempo continuo”;
- per le eq. alle differenze, la variabile indipendente t assume valori discreti, tipicamente interi $t \in \mathbb{Z}$, e D è l’operatore differenza in avanti $D^k y(t) = y(t + k)$. Questi sistemi sono detti “a tempo discreto”;
- il termine forzante $u(t)$ è rispettivamente una funzione (continua a tratti) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ovvero una successione $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ricordiamo che, se il modello è ben posto, è sempre possibile scriverlo in forma *normale*

$$D^n y = \hat{F}(y, Dy, \dots, D^{n-1} y, u, Du, \dots, D^p u, t) \tag{1}$$

e quindi, *nell’ipotesi* $n \geq p$, essere ricondotto ad un sistema di equazioni del primo ordine

$$D\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t), \tag{2}$$

dove si omette la dipendenza di \mathbf{x} e u da t , e si usa il carattere grassetto per indicare grandezze vettoriali:

$$\mathbf{f}(\cdot) \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}(t) \stackrel{def}{=} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix},$$

Si noti che in questa equazione appaiono solo le funzioni (successioni) $x_i(t)$, $u(t)$ e la derivata (differenza) prima delle $x_i(t)$.

Una equazione differenziale o alle differenze (ben posta) individua tutta l'evoluzione delle grandezze coinvolte quando ne siano date le *condizioni iniziali*. Queste sono specificate, nel caso della 1, dai valori ad un istante t_0 di y e delle sue prime $n - 1$ derivate; nel caso della 2, dai valori dello stato al tempo t_0 , ad es. $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Una soluzione del sistema 2 è una funzione $\mathbf{x}(t)$ che verifica 2 per ogni t , quindi

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

e

$$D\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t), t), \quad \forall t.$$

Per sottolineare la dipendenza di questa soluzione dalle condizioni iniziali e dalle funzioni di ingresso, scriveremo talvolta $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, u)$.

Nota che sia la soluzione $\mathbf{x}(t)$ della 2, è possibile trovare la soluzione $y(t)$ della 1 attraverso una relazione algebrica

$$y(t) = h(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t), u(t), t) = h(\mathbf{x}, u, t). \quad (3)$$

1.3 Esempi

La descrizione di un sistema dinamico data da 2 e 3 è la più conveniente per il nostro studio. Studieremo quindi prevalentemente sistemi dinamici descritti dalle equazioni

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t) \\ y &= h(\mathbf{x}, u, t) \end{aligned} \quad (4)$$

La tecnica per passare dalla forma 1 alla forma 2 è molto semplice nel caso $p = 1$

$$D^n y = \hat{F}(y, Dy, \dots, D^{n-1}y, u, t).$$

Basta infatti porre

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y \\ Dy \\ \vdots \\ D^{n-1}y \end{bmatrix} \quad (5)$$

così che si ottiene

$$D\mathbf{x} = \begin{bmatrix} Dx_1 \\ Dx_2 \\ \vdots \\ Dx_{n-1} \\ Dx_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \\ \hat{F}(\mathbf{x}, u, t) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u, t),$$

cioè la forma voluta. Le condizioni iniziali della forma 1 si traducono immediatamente in condizioni iniziali sulle \mathbf{x} della forma 2. Inoltre, la variabile y è banalmente ottenuta dalla conoscenza di una soluzione $\mathbf{x}(t)$:

$$y(t) = h(\mathbf{x}, u, t) = x_1$$

Nel caso più generale in cui sia $1 < p \leq n$, il passaggio nella forma di sistema di n equazioni del primo ordine è più complesso. È invece ancora molto facile scrivere un sistema di $n + p$ equazioni, ponendo per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+p}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j &= D^{j-1}u, & j &= 1, \dots, p \\ \mathbf{x}_{p+i} &= D^{i-1}y, & i &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

Vedremo più avanti come procedere a scrivere sistemi con $1 < p \leq n$ nella forma di stato con soli n stati, nel caso che l'equazione differenziale abbia una particolare, notevolissima proprietà detta di linearità.

1.4 Più ingressi e più uscite

Quanto sopra detto nel caso di una equazione in forma normale con un termine forzante si generalizza al caso di l equazioni con m termini forzanti:

$$D^{n_i}y_i = \hat{F}_1(y_1, \dots, D^{n_1-1}y_1, \dots, y_l, \dots, D^{n_l-1}y_l, u_1, \dots, D^{p_{i1}}u_1, \dots, u_m, \dots, D^{p_{im}}u_m, t); \quad (6)$$

che si riporta ad un sistema di equazioni del primo ordine con più ingressi:

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= h(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (7)$$

dove $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n = \sum_{i=1}^l n_i$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^l$.

Un sistema con singolo ingresso e singola uscita viene indicato con la sigla SISO; la sigla MIMO è usata per sistemi con ingresso e/o uscita multipli.

1.5 Stati, ingressi, uscite

Nella forma

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= h(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned}$$

si individuano alcuni degli elementi fondamentali dei Sistemi Dinamici, cui si danno particolari denominazioni:

Stato Il vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è detto vettore di stato (o brevemente “stato”) del sistema;

Ingressi I termini (funzioni o successioni) forzanti raccolti nel vettore $\mathbf{u}(t)$ sono detti ingressi del sistema;

Uscite Le funzioni (o successioni) $\mathbf{y}(t)$ sono dette uscite del sistema.

Lo stato del sistema è un insieme di variabili, la cui conoscenza ad un generico istante t_0 , assieme alla conoscenza degli ingressi $u(t)$ per ogni $t \geq t_0$ e delle equazioni del modello 7, è sufficiente a determinare univocamente i valori dello stato stesso $\mathbf{x}(t)$ e delle uscite $\mathbf{y}(t)$ per ogni tempo successivo a t_0 . Questa proprietà dei modelli a spazio di stato viene detta di “separazione tra passato e futuro”.

Un ingresso $\mathbf{u}_i(t)$ rappresenta tipicamente l’azione che un agente esterno al sistema può esercitare su di esso, forzandone la sua evoluzione. Dal punto di vista dell’ingegnere, sarà importante distinguere

- ingressi manipolabili a piacere dal progettista, detti anche “controlli”, che potranno essere scelti in modo da influenzare il comportamento del sistema in modo da rispondere a prestabilite specifiche;
- ingressi incontrollabili, o “disturbi”, che invece possono alterare i comportamenti del sistema in senso negativo.

Una uscita $\mathbf{y}_i(t)$ del sistema rappresenta una grandezza variabile in termini della quale è “riassunto” il comportamento del sistema. A seconda dei casi, una uscita si può caratterizzare come

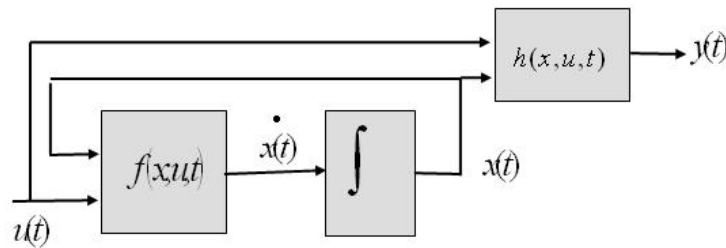
- una grandezza indicatrice del comportamento del sistema, il cui andamento nel tempo è soggetto a specifiche di progetto ed è l’obiettivo primario delle scelte di controllo (uscita primaria o “controllata”);
- una grandezza disponibile per la misurazione (a differenza degli stati, che in generale possono non esserlo), la cui conoscenza, assieme eventualmente alla conoscenza del modello 7 e/o a quella dell’ingresso $u(t)$, può essere utilizzata per acquisire maggiori informazioni sul sistema (uscita secondaria o “misurata”);

Si noti che, mentre gli ingressi sono alternativamente di controllo o di disturbo, le uscite controllate sono anche tipicamente misurate.

Esempio Nel sistema massa–molla–smorzamento sopra visto, le variabili di stato scelte coincidono con posizione e velocità del punto materiale; l’ingresso con la forza esterna agente sulla massa, e l’uscita con la posizione. In un modello più completo, possiamo pensare che sia presente oltre alla forza intenzionalmente controllata f una forza di disturbo f_{dist} ; e che, sebbene si desideri primariamente trovare una legge per f che faccia in modo che la posizione della massa sia quella desiderata ad ogni istante (uscita primaria), sia disponibile a questo scopo non solo la misura della posizione stessa, ma anche quella della velocità ad ogni istante (si vedrà più avanti che questa uscita misurata potrà essere molto utile nel migliorare le caratteristiche del sistema).

1.6 Causalità, Stazionarietà, Linearità

La forma 7 delle equazioni di un sistema dinamico può essere interpretata graficamente come in figura



Lo schema suggerisce un rapporto causa–effetto tra gli ingressi e le uscite, mediato dagli stati. Questo è in effetti vero: un sistema si dice “causale” (o “proprio”) se per esso, nota che sia l’equazione differenziale o alle differenze che lo determina, noti i valori di tutte le funzioni che vi appaiono in un istante t_0 , e noti i valori delle funzioni di ingresso per ogni $t > t_0$, anche i valori delle funzioni di uscita sono univocamente determinati per ogni $t > t_0$.

Un sistema dinamico rappresentato da una equazione in forma normale

$$D^n y = \hat{F}(y, Dy, \dots, D^{n-1}y, u, Du, \dots, D^p u, t)$$

è causale tra l’uscita y e l’ingresso u se $n \geq p$. Se un sistema non è causale tra u e y , esso non è fisicamente realizzabile. Questo è particolarmente evidente per i sistemi a tempo discreto, nei quali per valutare la y in un istante t , è necessario conoscere la u in istanti successivi a t , cioè nel futuro.

Un sistema è poi detto “strettamente” causale, se l’uscita ad un istante t^* non dipende dal valore dell’ingresso allo stesso istante, ma solo dai valori di $u(t)$ per $t < t^*$. Nella equazione in forma normale di un tale sistema dovrà essere dunque $n > p$.

Un sistema dinamico rappresentato in forma di stato è sempre causale, a causa della definizione stessa di vettore di stato. In altri termini, un sistema con equazione in forma normale non causale non può essere posto in forma di stato (a meno di non scambiare il ruolo di ingressi e uscite).

La forma di stato di un sistema strettamente causale evidenzia la mancanza di una dipendenza immediata, algebrica, tra l’uscita e l’ingresso, che non appare nella equazione di uscita se non attraverso l’effetto che esso ha sugli stati:

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ y &= h(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

Un sistema nelle cui equazioni non appare esplicitamente il tempo, si dice “stazionario” o “tempo-invariante”. Un sistema in forma normale 1 è stazionario se $\frac{\partial \hat{F}(\cdot)}{\partial t} = 0$. Un sistema in forma di stato 2 è tempo-invariante se $\frac{\partial \mathbf{f}(\cdot)}{\partial t} = 0$ e $\frac{\partial h(\cdot)}{\partial t} = 0$, e semplicemente si scrive

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) \\ y &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, u) \end{aligned}$$

Le soluzioni di un sistema tempo-invariante non dipendono dall’istante iniziale. In altri termini, la soluzione $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, u(t - t_0))$ corrispondente a condizioni iniziali \mathbf{x}_0 al tempo t_0 e all’ingresso $u(\tau)$ applicato a partire da $\tau = t_0$, differisce dalla soluzione $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_0, u(t - t_1))$ che invece corrisponde a condizioni iniziali \mathbf{x}_0 al tempo t_1 e allo stesso ingresso $u(\tau)$ applicato però a partire da t_1 , solo per una traslazione nel tempo: $\mathbf{x}_1(t - t_0) = \mathbf{x}_2(t - t_1)$. Si può verificare questo per semplice sostituzione e calcolo.

Un sistema in forma normale 1 nel quale la funzione $\hat{F}(\cdot)$ sia lineare rispetto alle $D^i y, i = 1, \dots, n - 1$ e alle $D^j u, j = 1, \dots, p$, cioè un sistema nella forma

$$D^n y = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) D^i y + \sum_{j=0}^p b_j(t) D^j u, \quad (8)$$

si dice un **sistema lineare**. I coefficienti a_i, b_j della combinazione lineare sono in generale funzioni del tempo. Se il sistema lineare è anche stazionario, i coefficienti sono costanti.

Un sistema in forma di stato 7 nel quale le funzioni $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ e $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ siano lineari rispetto sia ad \mathbf{x} che a \mathbf{u} , è un sistema lineare. In altri termini,

in un sistema lineare si ha

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}\end{aligned}$$

dove $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ sono matrici rispettivamente di dimensioni $n \times n$, $n \times m$, $l \times n$, e $l \times m$, i cui elementi sono in generale funzioni del tempo (ma non dello stato).

Un sistema lineare e stazionario in forma di stato è scritto poi

$$\begin{aligned}D\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u},\end{aligned}\tag{9}$$

con matrici a elementi costanti, delle stesse dimensioni.

1.7 Proprietà dei sistemi lineari

Si ricordano dalla analisi le seguenti proprietà delle equazioni lineari differenziali e alle differenze in forma normale

- Ogni soluzione della equazione lineare 8 è data dalla somma di un integrale omogeneo (ottenuto per $u \equiv 0$) e di un integrale particolare;
- Se $y_1(t), \dots, y_n(t)$ sono n soluzioni omogenee indipendenti, ogni soluzione omogenea è una combinazione lineare delle $y_i(t)$;
- Le n costanti della combinazione lineare sono univocamente determinate date le n condizioni iniziali del sistema. Pertanto, e per la linearità del sistema, se $y_a(t)$ è la soluzione corrispondente alle condizioni iniziali $y(t_0) = y_{a0}, \dots, D^{n-1}y(t_0) = y_{a0}^{(n-1)}$, e $y_b(t)$ quella corrispondente a $y(t_0) = y_{b0}, \dots, D^{n-1}y(t_0) = y_{b0}^{(n-1)}$, la soluzione corrispondente a $y(t_0) = \alpha y_{a0} + \beta y_{b0}, \dots, D^{n-1}y(t_0) = \alpha y_{a0}^{(n-1)} + \beta y_{b0}^{(n-1)}$ è data da $y(t) = \alpha y_a(t) + \beta y_b(t)$ (sovrapposizione degli effetti delle condizioni iniziali).
- La sovrapposizione degli effetti vale anche per le funzioni (successioni) di ingresso: se $y_{pi}(t)$ è l'integrale particolare di 8 per $u(t) = u_i(t)$, allora la soluzione corrispondente a $u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + \dots$ è data da $\alpha_1 y_{p1}(t) + \alpha_2 y_{p2}(t) + \dots$;
- Se $y_p(t)$ è un integrale particolare di 8 per $u(t)$, allora $Dy_p(t)$ è un integrale particolare corrispondente a $Du(t)$

1.8 Cambiamenti di coordinate

La forma di stato di un sistema dinamico mette in luce come esso sia da intendersi come una relazione dinamica tra tre insiemi di grandezze, gli ingressi, gli stati, e le uscite, definite su spazi di dimensioni diverse.

Quando si sono derivate le forme di stato dei sistemi, si sono descritti come ingressi \mathbf{u} ed uscite \mathbf{y} le grandezze che apparivano nella forma normale. Abbiamo anche visto come in alcuni casi gli stati potevano essere individuati con le uscite e le loro derivate. Talvolta però non è possibile scegliere così gli stati; altre volte questa scelta non è la più conveniente.

Mentre le uscite e gli ingressi di un sistema in forma di stato sono in certo modo fissati dalla equazione in forma normale (anche se vedremo più avanti che talvolta sarà opportuno manipolare queste definizioni), la scelta degli stati stessi è in certa misura arbitraria. In particolare, dato un sistema in forma di stato descritto da un vettore \mathbf{x} , è possibile pensare ad un cambiamento di coordinate sullo spazio in cui è definito lo stato, in generale introducendo una nuova variabile di stato

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$$

Perchè \mathbf{z} e \mathbf{x} siano corrette rappresentazioni di uno stesso stato, pur se diverse, sarà necessario che la mappa $\Phi(\cdot)$ sia biiettiva (su tutto l'insieme delle variabili di stato di interesse): cioè, ad ogni \mathbf{x} corrisponda uno ed un solo \mathbf{z} . Di conseguenza, esiste la applicazione inversa di Φ , e scriveremo $\mathbf{x} = \Phi^{-1}(\mathbf{z})$. Per il teorema delle funzioni inverse, ricordiamo che una condizione necessaria e sufficiente per la biiettività di $\Phi(\cdot)$ in un intorno di \mathbf{x}_0 è che per la matrice Jacobiana

$$\Phi_* = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{x}_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{x}_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial \mathbf{x}_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial \mathbf{x}_n} \end{bmatrix}$$

valutata in \mathbf{x}_0 , valga $\det(\Phi_*(\mathbf{x}_0)) \neq 0$. In questo caso, le n funzioni $\Phi_i(\cdot)$ che formano $\Phi(\cdot)$ si dicono indipendenti tra loro.

Questa condizione di indipendenza non è sufficiente a fare di una mappa $\Phi(\cdot)$ un cambiamento lecito di variabili per un sistema dinamico. In quest'ultimo infatti intervengono anche le derivate delle grandezze di stato, per cui dovremo anche chiedere la continuità e la continua differenziabilità della mappa di cambiamento di coordinate (nella regione di interesse), nonché della sua inversa.

Una mappa $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$, per la quale valgano queste proprietà ($\Phi \in C^1$; $\Phi^{-1} \in C^1$) in regioni corrispondenti del dominio e del codominio, si dice “diffeomorfismo”, e rappresenta un valido cambio di coordinate per i sistemi dinamici.

Esempio Per $n = 1$, $z = \sin(x)$ è un diffeomorfismo tra le $x \in D_x = (-\pi/2, \pi/2)$ e le $z \in D_z = (-1, 1)$. Infatti, $\frac{\partial \sin(x)}{\partial x} = \cos(x) \neq 0, \forall x \in D_x$, quindi $\Phi^{-1}(z) = \arcsin(z)$ esiste su D_z ; inoltre, anche le derivate $D \sin(x)$ e $D \arcsin(z) = 1/\cos(\arcsin(z))$ sono ivi continue. Invece, $z = \cos(x)$ non è un valido cambio di coordinate.

Esempio In \mathbb{R}^2 , $z_1 = \sin(x_1 + x_2), z_2 = x_1$ va bene (vicino all'origine), ma $z_1 = \sin(x_1 + x_2), z_2 = x_1^2$ no.

Le equazioni delle forme di stato che descrivono i sistemi dinamici sono modificate dai cambiamenti di coordinate in modo diverso a seconda che si tratti di sistemi a tempo continuo o discreto. Nel primo caso infatti il diffeomorfismo $\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{x})$ comporta $D\mathbf{z} = \Phi_* D\mathbf{x}$; nel secondo, $D\mathbf{z} = \Phi(D\mathbf{x})$.

Per maggior chiarezza, un sistema dinamico a tempo continuo, che esplicitando il simbolo $D\mathbf{x} = \frac{d}{dt}\mathbf{x} \stackrel{def}{=} \dot{\mathbf{x}}$ si scrive

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t),\end{aligned}$$

è modificato semplicemente applicando la regola di derivazione composta ($\dot{\mathbf{z}} = \Phi_*(\cdot)\dot{\mathbf{x}}$) e diviene

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t)\end{aligned}$$

dove $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = [\Phi_*(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)]_{\{\mathbf{x}=\Phi^{-1}(\mathbf{z})\}}$, e $\hat{\mathbf{h}}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)|_{\{\mathbf{x}=\Phi^{-1}(\mathbf{z})\}}$.

Lo stesso cambiamento di variabili agisce su un sistema a tempo discreto, scritto esplicitando $D\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t+1)$,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)\end{aligned}$$

risultando in

$$\begin{aligned}\mathbf{z}(t+1) &= \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) &= \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}, t)\end{aligned}$$

dove adesso vale $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = [\Phi(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t))]_{\{\mathbf{x}=\Phi^{-1}(\mathbf{z})\}}$, e $\hat{\mathbf{h}}$ come sopra.

Particolari cambiamenti di coordinate sono quelli lineari, cioè quelli per cui vale

$$\Phi(\alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2) = \alpha\Phi(\mathbf{x}_1) + \beta\Phi(\mathbf{x}_2).$$

Ricordiamo che una applicazione lineare da uno spazio a p dimensioni a uno spazio a q dimensioni è sempre rappresentabile mediante una matrice $q \times p$. Nel nostro caso, un cambiamento di coordinate lineare e stazionario è pertanto espresso in generale da

$$\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$$

dove \mathbf{T} è una matrice $n \times n$ costante e invertibile, cioè $\det(\mathbf{T}) \neq 0$.

Un cambiamento di variabili lineare stazionario applicato ad un sistema dinamico anch'esso lineare e stazionario agisce nello stesso modo per sistemi a tempo continuo e discreto, lasciandone inalterata la natura lineare e stazionaria:

$$\begin{aligned} D\mathbf{z} &= \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z} + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \hat{\mathbf{C}}\mathbf{z} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

con $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}$, $\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{T}\mathbf{B}$, $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}$.

Si osservi esplicitamente che tutte le descrizioni del sistema dinamico che differiscono solo per un cambiamento di coordinate sono del tutto equivalenti, e che quindi non esistono coordinate privilegiate o “naturali” in cui descrivere il sistema.

Inoltre, le matrici dinamiche di tutte le rappresentazioni equivalenti di un sistema LS (lineare stazionario), sono trasformazioni per “similitudine” (o “contragredienza”) delle altre.

È opportuno qui richiamare dal corso di Algebra delle matrici alcune proprietà delle matrici simili.

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è simile a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se esiste una matrice $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertibile tale che $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}$;
- Due matrici simili hanno gli stessi autovalori, mentre gli autovettori sono trasformati secondo \mathbf{T} : se $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}$, $\mathbf{B}\mathbf{y} = \lambda_2\mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{y} = \lambda_2\mathbf{y}$; posto $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{y}$, premoltiplicando per \mathbf{T}^{-1} si ha $\mathbf{A}\mathbf{z} = \lambda_2\mathbf{z}$, quindi $\lambda_2 = \lambda_1$ e $\mathbf{z} = \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$.
- Per una matrice \mathbf{A} che ha n autovettori indipendenti, esiste una \mathbf{Q} che trasforma \mathbf{A} per similitudine in una matrice Λ diagonale, $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \Lambda$. Λ può essere ordinata in modo da avere l' i -esimo autovalore più grande di \mathbf{A} , λ_i , nella posizione diagonale $\Lambda(i, i)$, nel qual caso la i -esima colonna $\mathbf{Q}(:, i)$ di \mathbf{Q} è l'autovettore di \mathbf{A} corrispondente a λ_i .
- La i -esima riga $\mathbf{Q}^{-1}(i, :)$ di \mathbf{Q}^{-1} soddisfa alla equazione $\mathbf{Q}^{-1}(i, :)\mathbf{A} = \lambda_i\mathbf{Q}^{-1}(i, :)$, e viene pertanto detta autovettore destro di \mathbf{A} . Si noti che, trasponendo questa relazione e poichè gli autovalori di una matrice e della sua trasposta coincidono, risulta che gli autovettori destri di \mathbf{A} sono i trasposti degli autovettori comuni, o sinistri, di \mathbf{A}^T .
- Un altro modo di scrivere $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1}$ è pertanto

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{Q}(:, i) \mathbf{Q}^{-1}(i, :),$$

cioè come somma pesata di matrici diadiche (prodotto colonna per riga).

- Caso particolare: una matrice simmetrica $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ ha sempre n autovettori indipendenti, che possono sempre essere scelti ortogonali tra loro, e di norma unitaria. Pertanto esiste una matrice \mathbf{Q} che diagonalizza \mathbf{A} per similitudine, ed è ortonormale: $\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I} \Leftrightarrow \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}$. Autovettori destri e sinistri in questo caso coincidono, a meno di una trasposizione.
- Non tutte le matrici $n \times n$ sono in generale diagonalizzabili per similitudine, in quanto possono non possedere n autovettori indipendenti con cui costruire la matrice \mathbf{Q} . Questo caso è escluso per matrici \mathbf{A} che abbiano tutti gli autovalori diversi: infatti, autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono certamente indipendenti (se $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$, posto per assurdo $\mathbf{x}_2 = \gamma\mathbf{x}_1$ si ottiene $\lambda_1 = \lambda_2$).
- La non-diagonalizzabilità (o difettività) può darsi solo se la matrice ha qualche autovalore multiplo, cioè se il *polinomio caratteristico* della matrice, ottenuto ponendo $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$, contiene almeno una soluzione con molteplicità algebrica doppia o superiore. In altri termini, il polinomio caratteristico $\pi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, deve essere fattorizzabile nella forma $(\lambda - \lambda_1)^{\mu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\mu_2} \dots (\lambda - \lambda_q)^{\mu_q}$, dove $\lambda_i, i = 1, \dots, q$ sono i q autovalori distinti ($\lambda_i \neq \lambda_j$), e μ_i le loro rispettive molteplicità algebriche, tali che $\sum_{i=1}^q \mu_i = n$, con almeno uno dei μ_i maggiore di uno.
- Non tutte le matrici con autovalori multipli sono difettive: esempio lampante di matrice con autovalore multiplo ma diagonalizzabile è la matrice identica di ordine n (che ha un solo autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità algebrica n); esempi meno banali sono tutte le matrici simili ad una matrice diagonale \mathbf{D} , possibilmente con alcuni elementi della diagonale ripetuti (cioè del tipo \mathbf{PDP}^{-1}). In questi casi, nonostante la presenza di autovalori λ_i a molteplicità algebrica $\mu_i > 1$, è ancora possibile trovare un numero di autovettori corrispondenti pari ad μ_i . In altri termini, l'equazione $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{x} = 0$ può ammettere μ_i soluzioni $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{\mu_i}$ indipendenti, o ancora, equivalentemente, lo spazio nullo (kernel) della matrice $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$ ha dimensione μ_i . Questi μ_i autovettori indipendenti possono essere usati quindi come colonne della matrice diagonalizzante \mathbf{Q} .
- Il numero ν_i di autovettori indipendenti corrispondenti allo stesso autovalore λ_i , cioè la dimensione dello spazio nullo di $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$, viene detta

“molteplicità geometrica” dell’autovalore. Una condizione necessaria e sufficiente alla diagonalizzabilità di una matrice è quindi che i suoi autovalori abbiano molteplicità geometrica pari a quella algebrica.

- Uno degli esempi più semplici di difettività è offerto dalla seguente matrice:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

al cui unico autovalore $\lambda_1 = 1$, di molteplicità algebrica 2, corrisponde un solo autovettore, $\mathbf{x} = [1, 0]^T$.

Un risultato assai utile dell’algebra lineare, che generalizza la diagonalizzazione per similitudine delle matrici, è quello che afferma che *ogni* matrice \mathbf{A} quadrata di dimensione n può essere trasformata per similitudine in forma di Jordan, $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{Q}$. Una matrice in forma di Jordan \mathbf{J} è diagonale ($\mathbf{J}_{ij} = 0$ per $i \neq j$), eccetto al più per elementi non nulli sulla prima sopradiagonale ($\mathbf{J}_{i+1,i}$). Di questi elementi sopradiagonali non nulli ve ne sono tanti quanti la differenza tra la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di \mathbf{A} (cioè n), e la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori stessi. Pertanto, la diagonalizzazione di una matrice è un caso particolare della sua jordanizzazione.

- Più precisamente, la forma di Jordan di \mathbf{A} è una matrice diagonale a blocchi di dimensioni diverse, i cui blocchi sono tanti quanti gli autovettori indipendenti di \mathbf{A} . Ogni blocco ha sulla diagonale l’autovalore corrispondente al suo autovettore, e sulla sopradiagonale tutti 1. Ad esempio la matrice di Jordan

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{c|cc|ccc} 1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{array} \right]$$

corrisponde (al variare di \mathbf{Q}) a matrici \mathbf{A} 6×6 con tre soli autovalori distinti (1.3 con molteplicità algebrica 1; 2 con $\mu = 2$; e 3.5 con $\mu = 3$), ognuno dei quali ha molteplicità geometrica uno.

- Invece, nel caso

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{c|cc|cc|c} 1.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.5 \end{array} \right]$$

si hanno gli stessi autovalori e le stesse molteplicità algebriche dell'esempio precedente, ma l'autovalore in 3.5 ha ora molteplicità geometrica doppia. Esistono altre quattro possibili strutture non equivalenti per una matrice con gli stessi autovalori e le stesse molteplicità algebriche di quelle sopra riportate.

- Si deve notare che conoscere la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori di una matrice non è sufficiente a stabilire la struttura della sua forma di Jordan: ad esempio, nel caso di un autovalore λ con $\mu = 4$ e $\nu = 2$, si possono avere i due casi

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix};$$

- Consideriamo ad esempio il caso di una matrice \mathbf{A} $n \times n$ con un autovalore λ a molteplicità algebrica $\mu = n$ e geometrica $\nu = 1$. Sia \mathbf{x}_1 un autovettore corrispondente; per ottenere una matrice \mathbf{Q} che rappresenti un legittimo cambiamento di coordinate, possiamo utilizzare \mathbf{x}_1 come prima colonna di \mathbf{Q} , ma abbiamo bisogno di altri $n - 1$ vettori indipendenti da questo per completare le colonne di \mathbf{Q} . Se vogliamo che la trasformata per similitudine di \mathbf{A} sia in forma di Jordan, dovrà essere

$$\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{J}$$

quindi (ponendo per semplicità $n = 3$)

$$\mathbf{A}[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_1 &= \lambda\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 + \lambda\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{A}\mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_2 + \lambda\mathbf{x}_3 \end{aligned}$$

ovvero ancora

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_1 &= 0 \\(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 \\(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x}_3 &= \mathbf{x}_2.\end{aligned}\tag{10}$$

Da queste relazioni risulta chiaramente che, mentre come ovvio $\mathbf{x}_1 \in \text{kernel}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ essendo un autovettore, $\mathbf{x}_2 \in \text{kernel}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2$ e $\mathbf{x}_3 \in \text{kernel}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^3$. Da questo esempio si capisce il ruolo che, nella jordanizzazione di una matrice, viene svolto dallo spazio nullo delle potenze successive di $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$, quando lo spazio nullo di $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ stessa non offra una dimensione pari alla molteplicità algebrica di λ . Per questo motivo, lo spazio nullo di $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k$ viene definito “autospazio generalizzato di ordine k associato a λ ”.

Torniamo al caso generale di una matrice \mathbf{A} $n \times n$ con autovalori λ_i a molteplicità algebrica μ_i e geometrica ν_i , e consideriamo la matrice $\mathbf{A}_p = \mathbf{A} - p\mathbf{I}$ e le sue potenze \mathbf{A}_p^k . Definiamo $d_k = \dim \text{kernel} \mathbf{A}_p^k$: è facile vedere che $d_k \leq d_{k+1}$. Inoltre $d_k \leq n$ per ovvi motivi. È possibile dimostrare che, se $d_k = d_{k+1}$, allora $d_{k+p} = d_k, \forall p \geq 1$. Questo significa che la successione dei $d_k, k = 1, 2, \dots$ è strettamente crescente sino ad un valore $k = \bar{k}$, per il quale la successione si stabilizza al valore $d_{\bar{k}}$.

Per $p \neq \lambda_i$, si ha $d_0 = d_1 = 0$, per cui $d_k = 0, \forall k$.

Per $p = \lambda_i$ si ha invece $d_0 = 0$ e $d_1 = \nu_i$; poniamo che sia s_i il valore a cui si stabilizza la successione dei d_k . Si dimostra che $s_i = \mu_i$, in altre parole: La dimensione dello spazio nullo di $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})^k$, cioè dell’autospazio di ordine k associato a λ , per k sufficientemente alto è pari alla molteplicità algebrica di λ_i .

I vettori che appartengono ad un autospazio generalizzato associato all’autovalore λ_i di ordine k , ma non a quello di ordine $k - 1$, si dicono “autovettori generalizzati” di ordine k associati a λ_i . A ogni autovettore generalizzato di ordine k associato a λ_i , designato ad esempio con $\mathbf{x}_i^{(k)}$, si associano altri $k - 1$ vettori mediante una “catena” definita da

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_i^{(k-1)} &= (\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{x}_i^{(k)} \\&\vdots \\ \mathbf{x}_i^{(1)} &= (\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})\mathbf{x}_i^{(2)}\end{aligned}$$

Se si prendessero tutte le catene di autovettori generalizzati si potrebbe avere un numero di vettori maggiore di n , quindi certamente dipendenti tra

loro. Per costruire una base di n vettori giustapponendo catene prive di vettori in comune, si procede dunque in questo modo:

1. Si prendono al livello \bar{k} $d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1}$ autovettori generalizzati di ordine \bar{k} , $\mathbf{x}_1^{(\bar{k})}, \dots, \mathbf{x}_{d_{\bar{k}}-d_{\bar{k}-1}}^{(\bar{k})}$ e se ne costruiscono le catene lunghe \bar{k} .
2. Al livello $\bar{k} - 1$ è necessario avere $d_{\bar{k}-1} - d_{\bar{k}-2}$ vettori indipendenti. Se tale numero è uguale al numero di vettori generati a questo livello dalle catene iniziate a livello superiore, si prendono questi e si procede. Altrimenti (cioè se $(d_{\bar{k}-1} - d_{\bar{k}-2}) > (d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1})$), si aggiungono al livello $\bar{k} - 1$ tutti gli autovettori generalizzati di ordine $\bar{k} - 1$ che sono linearmente indipendenti dai vettori $\mathbf{x}_1^{(\bar{k}-1)}, \dots, \mathbf{x}_{d_{\bar{k}}-d_{\bar{k}-1}}^{(\bar{k}-1)}$, e se ne generano le catene corrispondenti. Risulteranno in questo caso $(d_{\bar{k}-1} - d_{\bar{k}-2}) - (d_{\bar{k}} - d_{\bar{k}-1})$ nuove catene, lunghe $\bar{k} - 1$;
3. si procede così sino ad avere generato un totale di $d_1 = \nu$ catene, il che avviene quando sono stati generati n vettori indipendenti.
 - Si procede ora a costruire la matrice \mathbf{Q} ponendo nelle sue colonne tutte le catene generate dagli autovettori generalizzati, con l'accortezza di porre a sinistra l'ultimo elemento della catena $\mathbf{x}_i^{(1)}$, poi $\mathbf{x}_i^{(2)}$, sino a $\mathbf{x}_i^{(k)}$. Se si invertisse questo ordine, la matrice $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$ avrebbe non nulla la sottodiagonale, anzichè la sopradiagonale.
 - Ad ogni catena di vettori corrisponde nella forma di Jordan un miniblocco di dimensioni pari alla lunghezza della catena.
 - Si noti che, data una forma di Jordan $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{J}\mathbf{Q}^{-1}$, è possibile ottenere un'altra forma con scambi dell'ordine dei blocchi di Jordan, semplicemente scambiando l'ordine delle corrispondenti catene in \mathbf{Q} . A meno di questi inessenziali scambi, la forma di Jordan di una matrice è peraltro unica, ed è perciò chiamata "canonica". Invece, data una coppia di matrici simili \mathbf{A} e \mathbf{J} (questa in forma di Jordan), esistono infinite possibili matrici \mathbf{Q} .

1.9 Linearizzazione approssimata

Data la molto maggior potenza della analisi dei sistemi lineari rispetto a quelli nonlineari, è sovente desiderabile poter approssimare un sistema nonlineare con uno lineare, per lo meno “localmente”, cioè in zone “piccole” dello spazio di stato.

Questo può agevolmente farsi nell’intorno di un punto di equilibrio $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ di un sistema TI $D\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Infatti, sviluppando in serie di Taylor e troncando al primo ordine, si ha

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}}} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})$$

Definite le matrici costanti $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}}}$ e $\mathbf{B} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}}}$, e le nuove variabili di stato $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}$ e di ingresso $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$ come differenza rispetto ai valori di equilibrio, il sistema

$$D\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}$$

risulta una approssimazione al primo ordine (cioè lineare) del sistema dato.

In dettaglio: Per i T.C. si ha

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}$$

e $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ se $\bar{\mathbf{x}}$ è di equilibrio. Per i T.D. si ha invece

$$\tilde{\mathbf{x}}(t+1) = \mathbf{x}(t+1) - \bar{\mathbf{x}} \approx \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{u}}$$

e $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}})$ se $\bar{\mathbf{x}}$ è di equilibrio.

Se vi è una mappa di uscita $\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, si potrà linearizzare anch’essa in modo simile, ponendo $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}$, dove

$$\mathbf{C} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}}} ; \quad \mathbf{D} = \left. \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\substack{\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}}} .$$

Se il sistema fosse stato non stazionario, anche il linearizzato corrispondente risulterebbe tempo-variante. Alcune volte poi linearizzare un sistema attorno a valori di equilibrio non è sufficiente, perchè la reale evoluzione del sistema comporta variazioni in grande.

Si può allora ricorrere ad una linearizzazione attorno ad una traiettoria. Sia dunque $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{t})$ la soluzione della eq. nonlineare del sistema corrispondente ad un ingresso nominale $\bar{\mathbf{u}}(t)$. Si può procedere alla linearizzazione in modo del tutto analogo al precedente, con la unica accortezza che adesso il punto in cui calcolare le matrici Jacobiane di \mathbf{f} e \mathbf{h} rispetto a \mathbf{x} e \mathbf{u} , non è costante, ma una funzione del tempo. Si otterrà quindi in generale un sistema approssimato che è lineare, ma non stazionario, anche nel caso che il sistema originario fosse stazionario.

2 Esistenza e Unicità delle Soluzioni

Per un sistema ingresso–stati tempo–continuo nella forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t), t)$$

l'esistenza e unicità delle soluzioni non è in generale garantita. Ad esempio, la semplice equazione

$$\dot{x} = \frac{1}{2x}, \quad x(0) = 0$$

ha due soluzioni $x(t) = \pm\sqrt{t}$ entrambe valide; l'equazione

$$\dot{x} = x^2, \quad x(0) = x_0$$

ha soluzione $\mathbf{x}(t) = \frac{-x_0}{x_0 t - 1}$ definita solo per $0 \leq t < 1/x_0$ (quindi ha soluzione localmente, e non globalmente per ogni t . Si dice che questo sistema ha “tempo di fuga finito”).

I Teoremi di Peano e Lipschitz assicurano rispettivamente l'esistenza e la unicità delle soluzioni. In particolare, si ricorda che la continua differenziabilità di $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(t), t)$ rispetto a \mathbf{x} e t è sufficiente a garantire la esistenza e unicità delle soluzioni.

2.1 Soluzioni di equilibrio

Consideriamo il sistema nonlineare stazionario autonomo (senza ingressi)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{11}$$

Uno stato $\bar{\mathbf{x}}$ si dice “stato di equilibrio” se il sistema, trovandosi in $\bar{\mathbf{x}}$ in un qualsiasi istante \bar{t} , vi rimane $\forall t \geq \bar{t}$. Condizione necessaria e sufficiente perchè $\bar{\mathbf{x}}$ sia di equilibrio è che $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Infatti, consideriamo la soluzione $\mathbf{x}(t)$, e le sue derivate: a) se $\bar{\mathbf{x}}$ è di equilibrio, $\mathbf{x}(t) \equiv \bar{\mathbf{x}} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$; b) se $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$, potrebbe apparire ancora possibile che fosse $\mathbf{x}(t) \neq 0$, ad esempio per effetto di $\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \neq 0$; ma questa eventualità contraddirebbe l'ipotesi fatta che \mathbf{x} rappresenti lo **stato** del sistema, che contiene **tutta** l'informazione necessaria a predire esattamente il futuro della soluzione (principio di separazione passato–futuro).

Più in generale, per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$, la coppia $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$, con $\bar{\mathbf{u}}$ costante, è una coppia di stati e ingressi di equilibrio se $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t) = 0, \forall t$.

Per un sistema tempo–discreto $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$, i punti di equilibrio (definiti ancora come sopra) sono tutti e soli gli $\bar{\mathbf{x}}$ tali che $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{\mathbf{x}}$. Analogamente per le coppie di equilibrio $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}})$ di un sistema $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$, che sono tali se $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, t), \forall t$.

2.2 Soluzioni dei sistemi lineari

Per i sistemi lineari è possibile caratterizzare le soluzioni in modo molto più articolato: per i sistemi lineari e stazionari è addirittura possibile risolverle esplicitamente.

Sistemi lineari stazionari a tempo continuo

Ricordiamo dalla analisi che la soluzione della equazione lineare a coeff. costanti con forzamento $u(t)$

$$\dot{x} = ax + bu(t),$$

con condizioni iniziali $x(0) = x_0$, è data dalla somma di un integrale omogeneo e di un integrale particolare, esplicitamente

$$\mathbf{x}(t) = x_0 e^{at} + b \int_0^t e^{a(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

Nel caso di un sistema di n equazioni differenziali che rappresentano un sistema lineare stazionario, con una equazione di uscita, cioè

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (12)$$

con condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, la soluzione è analoga:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Naturalmente, l'esponenziale di una matrice necessita di una definizione appropriata. Possiamo dare questa definizione come serie di potenze:

$$e^{\mathbf{A}t} \stackrel{def}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} t^k = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + 1/2\mathbf{A}^2 t^2 + 1/6\mathbf{A}^3 t^3 + \dots$$

Dalla definizione è facile verificare che

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$$

e quindi anche verificare che 13 è effettivamente una soluzione della 14. Infatti, valendo $e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I}$, si ha $\mathbf{x}(0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) = \mathbf{I}\mathbf{x}_0$, e inoltre, derivando la prima delle 13,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}) &= \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \frac{d}{dt} \left(e^{\mathbf{A}t} \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \right) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \end{aligned}$$

Prima di studiare meglio l'esponenziale di una matrice che appare nella soluzione, è opportuno guardare alla struttura della soluzione stessa.

Innanzitutto, poichè $e^{\mathbf{A}t}$ è una matrice costante, fissato che sia il tempo t , gli stati iniziali si trasformano negli stati all'istante t linearmente;

anche l'operatore integrale (di convoluzione) che agisce sulla funzione di ingresso è lineare (l'integrale di una somma è la somma degli integrali, e l'integrale del prodotto di una funzione per una costante è pari al prodotto della costante per l'integrale della funzione);

nella soluzione, si distinguono due termini. Il primo, che dipende (linearmente) dagli stati iniziali, e non dagli ingressi, si dice **evoluzione libera** del sistema; il secondo, che invece dipende dagli ingressi ma non dallo stato iniziale, si dice **evoluzione forzata**.

È quindi immediato, nella soluzione della eq. di stato di un sistema lineare stazionario, verificare il principio di sovrapposizione degli effetti degli stati e degli ingressi.

L'esponenziale di una matrice ha altre importanti proprietà:

- $e^{\mathbf{A}_1 t} e^{\mathbf{A}_2 t} = e^{\mathbf{A}_2 t} e^{\mathbf{A}_1 t} = e^{(\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2)t}$, $\forall t$ **se e solo se** $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$ (due matrici diagonalizzabili commutano se e solo se condividono n autovettori indipendenti). Prova: applica la definizione e l'identità delle serie di potenze.
- $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$. Segue da sopra: $e^{\mathbf{A}t} e^{-\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t - \mathbf{A}t} = e^0 = \mathbf{I}$. Nota bene: $e^{\mathbf{A}t}$ è sempre invertibile, $\forall \mathbf{A}, \forall t$.
- Se $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, allora $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{v} = e^{\lambda t}\mathbf{v}$. Prova: applica la definizione e ricorda $\mathbf{A}^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v}$.
- $e^{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T}} = \mathbf{T}^{-1}e^{\mathbf{P}\mathbf{T}}$. Prova: applica la definizione e osserva che $(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T})^k = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}^k\mathbf{T}$.

L'espressione della definizione dell'esponenziale di una matrice non è in generale adatta al calcolo esplicito del valore della soluzione. Nel caso di una matrice diagonalizzabile, $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1}$ il calcolo è comunque semplice. Infatti se

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

si ha

$$e^{\Lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k t^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{bmatrix}$$

cioè

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

quindi

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}e^{\Lambda t}\mathbf{T}^{-1}$$

Nel caso di matrici con autovalori complessi, il risultato comprende ovviamente esponenziali complessi, così come colonne complesse nella matrice \mathbf{T} . Se \mathbf{A} è a valori reali (come sarà sempre il caso per le matrici dinamiche dei sistemi che studieremo), gli autovalori e autovettori complessi appaiono sempre assieme al loro coniugato, e questo fa sì che la matrice $e^{\mathbf{A}t}$ sia ancora a valori reali.

È possibile comunque, in questi casi, usare un cambiamento di coordinate reale, che trasforma per similitudine una matrice diagonalizzabile (sui complessi) \mathbf{A} in una matrice reale diagonale a blocchi, con blocchi al più di dimensione 2; il numero dei blocchi di dimensione 2 essendo pari al numero di coppie di autovalori complessi coniugati della matrice. Consideriamo ad esempio una matrice 2×2 , $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1}$, con

$$\begin{aligned} \Lambda(1,1) &= \sigma + \mathbf{j}\omega \\ \Lambda(2,2) &= \sigma - \mathbf{j}\omega \\ \mathbf{Q}(:,1) &= \mathbf{q}_r + \mathbf{j}\mathbf{q}_i \\ \mathbf{Q}(:,2) &= \mathbf{q}_r - \mathbf{j}\mathbf{q}_i \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \left[\mathbf{q}_r + \mathbf{j}\mathbf{q}_i \mid \mathbf{q}_r - \mathbf{j}\mathbf{q}_i \right] &= \\ &= \left[\mathbf{q}_r + \mathbf{j}\mathbf{q}_i \mid \mathbf{q}_r - \mathbf{j}\mathbf{q}_i \right] \begin{bmatrix} \sigma + \mathbf{j}\omega & 0 \\ 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} \left[\mathbf{q}_r + \mathbf{j}\mathbf{q}_i \mid \mathbf{q}_r - \mathbf{j}\mathbf{q}_i \right] &= \\ &= \left[\mathbf{q}_r + \mathbf{j}\mathbf{q}_i \mid \mathbf{q}_r - \mathbf{j}\mathbf{q}_i \right] e^{\sigma t} \begin{bmatrix} e^{\mathbf{j}\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-\mathbf{j}\omega t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ricordiamo le espressioni di $e^{\alpha+j\beta} = e^{\alpha}(\cos \beta + \mathbf{j} \sin \beta)$ e $e^{\alpha-j\beta} = e^{\alpha}(\cos \beta - \mathbf{j} \sin \beta)$,

e introduciamo la matrice invertibile

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{j} \\ 1 & \mathbf{j} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E}^{-1} = -\mathbf{j} \begin{bmatrix} \mathbf{j} & \mathbf{j} \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

Scrivendo $\mathbf{A}\mathbf{Q}\mathbf{E} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E} = \mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{E}^{-1}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}$, si ottiene

$$\mathbf{A} \left[\mathbf{q}_r \mid \mathbf{q}_i \right] = \left[\mathbf{q}_r \mid \mathbf{q}_i \right] \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

e

$$e^{\mathbf{A}t} \left[\mathbf{q}_r \mid \mathbf{q}_i \right] = \left[\mathbf{q}_r \mid \mathbf{q}_i \right] e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

Per matrici difettive, il calcolo dell'esponenziale si può fare con la forma di Jordan. Si noti innanzitutto che l'esponenziale di una matrice diagonale a blocchi può essere calcolato per blocchi. Infatti, essendo

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{A}_N \end{bmatrix} t \right)^k = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1 t)^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (\mathbf{A}_N t)^k \end{bmatrix}$$

si ha ovviamente

$$\exp \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathbf{A}_N \end{bmatrix} t \right) = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\mathbf{A}_N t} \end{bmatrix}$$

È quindi necessario solo calcolare l'esponenziale di un blocco di Jordan \mathbf{J} di dimensione generica q . Si ha

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{J}t} &= \exp \left(\begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} t \right) = \\ &= e^{(\lambda \mathbf{I}t + \mathbf{J}_0 t)} = e^{\lambda t} e^{\mathbf{J}_0 t} \end{aligned}$$

(infatti $\lambda \mathbf{I}t$ commuta con ogni matrice).

\mathbf{J}_0 è un miniblocco di Jordan con autovalore 0, perciò nilpotente di ordine q ($\mathbf{J}_0^q = 0$, ma $\mathbf{J}_0^k \neq 0, \forall k < q$). Avendosi

$$e^{\mathbf{J}_0 t} = \mathbf{I} + \mathbf{J}_0 t + \mathbf{J}_0^2 \frac{t^2}{2} + \cdots + \mathbf{J}_0^{q-1} \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}$$

si ottiene infine

$$e^{\mathbf{J}t} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{(q-2)}}{(q-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nel caso che \mathbf{A} abbia miniblocchi di Jordan di dimensione $q > 1$ corrispondenti ad autovalori complessi coniugati, è ancora possibile ottenere per la matrice e per il suo esponenziale una forma reale, procedendo in modo analogo a quanto fatto per la forma reale delle matrici diagonalizzabili.

Sia ad esempio $\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\mathbf{J}$, con

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \sigma + \mathbf{j}\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma + \mathbf{j}\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma - \mathbf{j}\omega \end{bmatrix}$$

e con

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r^{(1)} + \mathbf{j}\mathbf{q}_i^{(1)} & \mathbf{q}_r^{(2)} + \mathbf{j}\mathbf{q}_i^{(2)} & \mathbf{q}_r^{(1)} - \mathbf{j}\mathbf{q}_i^{(1)} & \mathbf{q}_r^{(2)} - \mathbf{j}\mathbf{q}_i^{(2)} \end{bmatrix}.$$

Ponendo

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\mathbf{j} \\ 1 & \mathbf{j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{j} \end{bmatrix}; \mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{j} & 0 & -\mathbf{j} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \mathbf{j} & 0 & -\mathbf{j} \end{bmatrix},$$

si ha una base reale

$$\mathbf{Q}\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_r^{(1)} & \mathbf{q}_i^{(1)} & \mathbf{q}_r^{(2)} & \mathbf{q}_i^{(2)} \end{bmatrix}$$

rispetto alla quale, la forma reale di Jordan è

$$\mathbf{J}_r = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{E} = \left[\begin{array}{cc|cc} \sigma & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & \sigma & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \sigma & \omega \\ 0 & 0 & -\omega & \sigma \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

Per miniblocchi di dimensioni maggiori, si può generalizzare facilmente (per esercizio) a:

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & \mathbf{I} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{M} & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix},$$

Per quanto riguarda l'esponenziale, si considerino le potenze

$$\mathbf{J}_r^k = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^k & k\mathbf{M}^{k-1} \\ 0 & \mathbf{M}^k \end{bmatrix},$$

e, applicando la definizione di esponenziale, si ha

$$e^{t\mathbf{J}_r} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} + \mathbf{M}t + \mathbf{M}^2t^2/2 + \dots & 0 + \mathbf{I}t + 2\mathbf{M}t^2/2 + 3\mathbf{M}^2t^3/3! + \dots \\ \hline 0 & \mathbf{I} + \mathbf{M}t + \mathbf{M}^2t^2/2 + \dots \end{array} \right]$$

cioè

$$e^{t\mathbf{J}_r} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{M}t} & te^{\mathbf{M}t} \\ 0 & e^{\mathbf{M}t} \end{bmatrix}$$

dove ricordiamo dalla forma normale delle matrici diagonalizzabili

$$e^{\mathbf{M}t} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

In generale, dunque, se \mathbf{J}_r ha q blocchi diagonali

$$e^{t\mathbf{J}_r} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{M}t} & te^{\mathbf{M}t} & \frac{t^2}{2!}e^{\mathbf{M}t} & \dots & \frac{t^{q-1}}{(q-1)!}e^{\mathbf{M}t} \\ 0 & e^{\mathbf{M}t} & te^{\mathbf{M}t} & \dots & \frac{t^{q-2}}{(q-2)!}e^{\mathbf{M}t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{\mathbf{M}t} \end{bmatrix}$$

Sistemi lineari stazionari a tempo discreto

Nel caso di un sistema di n equazioni alle differenze stazionario, con una equazione di uscita, cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

con condizioni iniziali $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, la soluzione può essere calcolata direttamente per induzione:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(0); \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{B}\mathbf{u}(1); \\ \mathbf{x}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(2) = \dots; \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}^t\mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{t-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \dots + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(t-2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t-1);$$

e quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}^t\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{t-1} \mathbf{A}^{t-i-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(i) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^t\mathbf{x}(0) + \sum_{i=0}^{t-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{t-i-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(i) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (15)$$

Poiché \mathbf{A}^t è una matrice costante, fissato che sia il tempo t , gli stati iniziali si trasformano negli stati all'istante t linearmente; parimenti, l'operatore di convoluzione che agisce sulla successione di ingresso è lineare. Nella soluzione, si distinguono due termini di **evoluzione libera** e di **evoluzione forzata**, e si verifica immediatamente il principio di sovrapposizione degli effetti degli stati e degli ingressi.

Per quanto riguarda la risposta forzata, si noti che la somma di convoluzione può essere scritta anche in forma matriciale:

$$\sum_{i=0}^{t-1} \mathbf{A}^{t-i-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(i) = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{t-1}\mathbf{B} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t-1) \\ \mathbf{u}(t-2) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

Le potenze di una matrice hanno alcune proprietà:

- $\mathbf{A}_1^t \mathbf{A}_2^t = \mathbf{A}_2^t \mathbf{A}_1^t, \forall t$ se e solo se $\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$;
- Se \mathbf{A} è invertibile, $(\mathbf{A}^t)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^t = \mathbf{A}^{-t}$.
- Se $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$, allora $\mathbf{A}^t\mathbf{v} = \lambda^t\mathbf{v}$.
- $(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{T})^t = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}^t\mathbf{T}$.
- $\det(\mathbf{A}^t) = (\det(\mathbf{A}))^t$. Il volume di una regione dello spazio di stato è maggiore, uguale, o minore della sua immagine attraverso la trasformazione \mathbf{A}^t a seconda che $\det(\mathbf{A})$ sia maggiore, uguale, o minore di uno.

Nel caso di matrice diagonalizzabile, si ha

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{T}^{-1} \Lambda^t \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^t \end{bmatrix} \mathbf{T}$$

Nel caso di matrici diagonalizzabili con autovalori complessi, ad es. $\lambda_1 = \sigma + \mathbf{j}\omega, \lambda_2 = \sigma - \mathbf{j}\omega$ si può dare una forma reale ponendo per ogni blocco della forma reale (ottenuto come nel caso visto sopra)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = \rho \mathbf{R} = \rho \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

dove $\rho = |\lambda_1| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ e $\theta = \arg(\lambda_1) = \text{atan2}(\omega, \sigma)$, e quindi $\omega = \rho \sin \theta$, $\sigma = \rho \cos \theta$.

Si ottiene

$$\mathbf{M}^t = \rho^t \mathbf{R}^t = \rho^t \begin{bmatrix} \cos t\theta & \sin t\theta \\ -\sin t\theta & \cos t\theta \end{bmatrix}$$

Per matrici difettive, il calcolo si può effettuare usando la forma di Jordan. Tenendo conto del fatto che le potenze di una matrice a blocchi mantengono questa struttura, coi blocchi elevati a potenza, è necessario solo calcolare le potenze di un blocco di Jordan \mathbf{J} di dimensione generica q . Si ha, poiché $\lambda \mathbf{I}$ commuta con ogni matrice

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^t &= \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}^t = \\ &= (\lambda \mathbf{I} + \mathbf{J}_0)^t = \sum_{i=0}^t (C_i^t \lambda^{t-i} \mathbf{J}_0^i) \end{aligned}$$

dove $C_i^t = \frac{t!}{i!(t-i)!}$.

Si ottiene, esplicitamente per un miniblocco \mathbf{J} $q \times q$

$$\mathbf{J}^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & C_1^t \lambda^{t-1} & C_2^t \lambda^{t-2} & \dots & C_{q-1}^t \lambda^{t-q+1} \\ 0 & \lambda^t & C_1^t \lambda^{t-1} & \dots & C_{q-2}^t \lambda^{t-q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^t & C_1^t \lambda^{t-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda^t \end{bmatrix}$$

dove, nel caso $t < q - 1$, si deve intendere $C_j^t = 0, \forall j > t$.

Nel caso che \mathbf{A} abbia miniblocchi di Jordan di dimensione $q > 1$ corrispondenti ad autovalori complessi coniugati, è ancora possibile ottenere per la matrice e le sue potenze una forma reale, procedendo in modo analogo a quanto fatto per la forma reale delle matrici diagonalizzabili. Considerando quindi un miniblocco reale di dimensione $2q \times 2q$

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{I} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{M} & \mathbf{I} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{M} & \mathbf{I} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mathbf{M} \end{bmatrix}$$

si verifica facilmente

$$\mathbf{J}_r^t = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^t & C_1^t \mathbf{M}^{t-1} & C_2^t \mathbf{M}^{t-2} & \dots & C_{q-1}^t \mathbf{M}^{t-q+1} \\ 0 & \mathbf{M}^t & C_1^t \mathbf{M}^{t-1} & \dots & C_{q-2}^t \mathbf{M}^{t-q+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}^t & C_1^t \mathbf{M}^{t-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{M}^t \end{bmatrix}$$

2.3 Analisi modale dei sistemi LTITC

Nella evoluzione libera di un sistema LTITC descritto dalle matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$, si potranno trovare, in base a quanto visto, combinazioni lineari reali di tutte e sole le funzioni che possono apparire nell'esponenziale di una matrice in forma di Jordan reale. Queste funzioni sono dette "modi" del sistema.

Riassumendo i vari casi visti, i modi di un sistema LTITC possono essere esclusivamente dei seguenti tipi:

- 1) Esponenziali semplici del tipo $e^{\lambda t}$, corrispondenti a miniblocchi semplici con autovalore λ reale; questi modi sono convergenti a zero, costanti, o divergenti a seconda che λ sia minore, uguale, o maggiore di zero;
- 2) Quasi-polinomi di tipo $t^k e^{\lambda t}$, $0 \leq k \leq q - 1$, corrispondenti a miniblocchi di dimensione $q > 1$ con autovalore reale λ ; questi modi sono convergenti a zero se $\lambda < 0$, polinomialmente divergenti se $\lambda = 0$ e $k > 0$, esponenzialmente divergenti se $\lambda > 0$;
- 3) Funzioni oscillanti del tipo $e^{\sigma t} \cos(\omega t)$, $e^{\sigma t} \sin(\omega t)$, corrispondenti a due miniblocchi semplici associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati $\sigma \pm \mathbf{j}\omega$ (ovvero ad un miniblocco reale semplice); questi modi sono convergenti a zero se la parte reale degli autovalori σ è minore di 0, limitati ma non convergenti se $\sigma = 0$, esponenzialmente divergenti se $\sigma > 0$;
- 4) Funzioni oscillanti del tipo $t^k e^{\sigma t} \cos(\omega t)$, $t^k e^{\sigma t} \sin(\omega t)$, $0 \leq k \leq q - 1$, corrispondenti a due miniblocchi di dimensione q associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati $\sigma \pm \mathbf{j}\omega$ (ovvero ad un miniblocco reale costituito da $q \times q$ blocchi reali); questi modi sono convergenti a zero se $\sigma < 0$, polinomialmente divergenti se $\sigma = 0$ e $k > 0$, esponenzialmente divergenti se $\sigma > 0$;

2.4 Analisi modale dei sistemi LTITD

Nella evoluzione libera di un sistema LTITD descritto dalle matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$, si potranno trovare, in base a quanto visto, combinazioni lineari reali di tutte e sole le successioni (modi) che possono apparire nelle potenze di una matrice in forma di Jordan reale.

Riassumendo i vari casi visti, i modi di un sistema LTITD possono essere esclusivamente dei seguenti tipi:

- 1) Potenze del tipo λ^t , corrispondenti a miniblocchi semplici con autovalore λ reale; questi modi sono convergenti a zero, limitati ma non convergenti, o divergenti a seconda che $|\lambda|$ sia minore, uguale, o maggiore di uno. Inoltre, vi è qui da notare che i modi reali con $\lambda < 0$ sono successioni oscillanti, con segno alternante ad ogni campione.
- 2) Successioni di tipo $C_k^t \lambda^{t-k}$, $0 \leq k \leq q-1$, corrispondenti a miniblocchi di dimensione $q > 1$ con autovalore reale λ ; questi modi sono convergenti a zero se $|\lambda| < 1$, polinomialmente divergenti con segno costante se $|\lambda| = 1$, esponenzialmente divergenti se $|\lambda| > 1$; hanno segno costante o alternante a seconda che $\lambda = \pm 0$.
- 3) Successioni oscillanti del tipo $\rho^t \cos(\theta t)$, $\rho^t \sin(\theta t)$, corrispondenti a due miniblocchi semplici associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati $\rho e^{\pm j\theta}$ (ovvero ad un miniblocco reale semplice); questi modi sono convergenti a zero se il modulo degli autovalori ρ è minore di 1, limitati ma non convergenti se $\rho = 1$, esponenzialmente divergenti se $\rho > 1$. Le oscillazioni della successione sono tanto più frequenti quanto più alto è θ , sino al caso $\theta = \pi$, in cui il periodo è di due campioni (quest'ultimo caso coincide con quanto visto al punto 1) per $\lambda < 0$);
- 4) Successioni oscillanti del tipo $C_k^t \rho^{t-k} \cos(\theta(t-k))$, $C_k^t \rho^{t-k} \sin(\theta(t-k))$, $0 \leq k \leq q-1$, corrispondenti a due miniblocchi di ordine q associati ad una coppia di autovalori complessi coniugati $\rho e^{\pm j\theta}$ (ovvero ad un miniblocco reale costituito da $q \times q$ blocchi reali); questi modi sono convergenti a zero se il modulo degli autovalori ρ è minore di 1, polinomialmente divergenti se $\rho = 1$ e $k > 0$, esponenzialmente divergenti se $\rho > 1$.

2.5 Instabilità numerica della forma di Jordan

La forma di Jordan, sia reale che complessa, è numericamente molto instabile. Ciò significa che, data una matrice \mathbf{A} difettiva, esiste sempre una matrice \mathbf{A}' ad essa arbitrariamente vicina (cioè, con norma $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}'\| < \epsilon, \forall \epsilon > 0$), che è diagonalizzabile.

$$\text{Esempio: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \begin{bmatrix} -1 + \epsilon & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 + \epsilon & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

Potrebbe apparire che, in qualsiasi modello realistico di un sistema, che dovrà tener conto di inevitabili approssimazioni, la rilevanza della forma di Jordan sia scarsa, e che, ad esempio, i modi di tipo $t^k e^{\lambda t}$, o $C_i^k \lambda^k$, non debbano apparire nelle risposte dei sistemi reali. In effetti non è così, poichè la risposta associata ad una forma di Jordan può essere vista come il limite a cui tende la risposta associata ad una matrice diagonalizzabile quando si avvicina alla difettività.

Si considerino due sistemi LTITC con matrici dinamiche \mathbf{A} e \mathbf{A}' dall'esempio precedente. Nel primo caso si hanno modi e^{-t} e te^{-t} . Nel secondo caso (matrice diagonalizzabile) si ha

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}'t} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(-1+\epsilon)t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/\epsilon \\ 0 & -1/\epsilon \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{(-1+\epsilon)t} & \frac{1}{\epsilon}(e^{-(1+\epsilon)t} - e^{-t}) \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e quindi una combinazione di modi che, per ϵ piccoli, tende a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (e^{-t} - e^{-(1+\epsilon)t}) = e^{-t} - (e^{-t} - te^{-t}\epsilon) = te^{-t}$$

Nel caso LTITD si ha

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} (-1 + \epsilon)^t & \frac{1}{\epsilon} ((-1 + \epsilon)^t - (-1)^t) \\ 0 & (-1)^t \end{bmatrix}$$

dove

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} ((-1 + \epsilon)^t - (-1)^t) = t(-1)^{t-1}.$$

3 Stabilità

Torniamo ora a considerare sistemi più generali, del tipo

$$D\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

e le sue soluzioni (o “movimenti”) $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{u}}, t)$, tra cui in particolare quelli che abbiamo chiamato di equilibrio (per i quali $\bar{\mathbf{u}}$ e $\bar{\mathbf{x}}$ sono costanti).

Intuitivamente associato al concetto di equilibrio è quello di stabilità (si pensi al caso di un pendolo), in particolare rispetto alle variazioni delle condizioni iniziali. Considereremo cioè comparativamente le soluzioni del sistema in condizioni nominali $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{u}}, t)$ e in condizioni perturbate $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}', \bar{\mathbf{u}}, t)$, e diremo stabili quei movimenti che sono poco alterati da piccole alterazioni delle condizioni iniziali. Cercheremo di rendere preciso questo concetto, e di stabilire tecniche per decidere della stabilità o meno di un equilibrio.

Poiché in quel che segue considereremo sempre $\bar{\mathbf{u}}$ come una particolare funzione o successione di ingresso, si potrà fare a meno di citarla esplicitamente nella descrizione del sistema e delle sue soluzioni:

$$D\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{16}$$

Un movimento $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ è stabile per il sistema 16 se tutti i movimenti che originano da condizioni iniziali sufficientemente vicine a \mathbf{x}_0 rimangono arbitrariamente vicine a $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ stesso; ovvero, più precisamente, se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tale che se (in qualche norma) $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0\| < \delta$, allora $\|\mathbf{x}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)\| < \epsilon, \forall t$.

Un movimento $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ è attrattivo per il sistema 16 (ovvero il sistema è convergente rispetto a quel movimento) se, per tempi sufficientemente lunghi, tutti i movimenti che originano da condizioni iniziali sufficientemente vicine a \mathbf{x}_0 tendono a $\bar{\mathbf{x}}(t)$; ovvero, se $\exists \delta > 0 : \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(\mathbf{x}', t) - \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, t)\| = 0$.

Un movimento è asintoticamente stabile se è stabile ed attrattivo. È instabile se non è stabile.

Questi concetti si specializzano per le particolari soluzioni che sono i punti di equilibrio:

Uno stato di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ è stabile per il sistema 16 se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(\mathbf{x}', t) - \bar{\mathbf{x}}\| < \epsilon, \forall t$.

Uno stato di equilibrio $\bar{\mathbf{x}}$ è attrattivo per il sistema 16 se $\exists \delta > 0$: $\|\mathbf{x}' - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(\mathbf{x}', t) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0$.

Uno stato di equilibrio è asintoticamente stabile se è stabile ed attrattivo. È instabile se non è stabile.

I problemi di stabilità e attrattività di un qualsiasi stato di equilibrio di un sistema possono essere riportati allo studio delle analoghe proprietà dell'origine per un sistema opportuno. Allo stesso modo, i problemi relativi ai movimenti di un sistema possono sempre essere riportati ad analoghi problemi di stati di equilibrio di un differente sistema, i cui stati sono le differenze tra il movimento perturbato e quello di riferimento. Infatti, se definiamo $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(\mathbf{x}', t) - \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)$, si ottiene da 16

$$D\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, t) = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$$

con condizioni iniziali $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}' - \mathbf{x}_0$, ed equilibrio in $\tilde{\mathbf{x}} = 0$. Si noti che il sistema ottenuto può essere non stazionario, anche se il sistema per il quale si voleva studiare la stabilità del movimento era stazionario.

Esempio: $\dot{\mathbf{x}} = \sin(x) + u$, con $u = 1$ e $\mathbf{x}_0 = 1$. La soluzione di riferimento è in questo caso calcolabile: $\bar{\mathbf{x}}(t) = -2 \arctan\left(\frac{2+t-c}{t-c}\right)$, con $c = 2/(1 + \tan(0.5))$; in altri casi una soluzione esplicita può non esser facilmente calcolabile; comunque

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \sin(x) + 1 - \sin(\bar{\mathbf{x}}) - 1 = \sin(\tilde{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}) - \sin(\bar{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$$

con $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{x}' - 1$, e $\tilde{\mathbf{f}}(0, t) \equiv 0$.

Per i sistemi LTI, conoscendo già le soluzioni esplicite, è possibile applicare questi concetti immediatamente:

- L'origine è un punto di equilibrio stabile e attrattivo per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ se tutti gli autovalori di \mathbf{A} hanno parte reale strettamente negativa (ovvero se lo spettro di \mathbf{A} appartiene al semipiano aperto sinistro, $\mathbf{s}(\mathbf{A}) \subset \text{OLHP}$); è semplicemente stabile se $\mathbf{s}(\mathbf{A}) \subset \text{CLHP} \stackrel{\text{def}}{=} \text{OLHP} \cup \partial(\text{OLHP})$ e se nessun autovalore a parte reale nulla ha molteplicità algebrica maggiore della geometrica; è instabile altrimenti.

- L'origine è un punto di equilibrio stabile e attrattivo per il sistema $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ se tutti gli autovalori di \mathbf{A} hanno modulo strettamente minore di uno (ovvero se lo spettro di \mathbf{A} appartiene al cerchio unitario aperto, $\mathbf{s}(\mathbf{A}) \subset \text{OUC}$); è semplicemente stabile se $\mathbf{s}(\mathbf{A}) \subset \text{CUC} \stackrel{\text{def}}{=} \text{OUC} \cup \partial(\text{OUC})$ e se nessun autovalore a modulo unitario ha molteplicità algebrica maggiore della geometrica; è instabile altrimenti.
- Se uno stato (in particolare l'origine) di un sistema LTI è stabile [rispettivamente, as. stabile], allora ogni altro stato di equilibrio, ed ogni movimento di riferimento sono stabili [as. stabili]. Si può quindi parlare di stabilità *del sistema*.
- La asintotica convergenza a zero degli stati vale a partire da qualsiasi condizione iniziale: un sistema LTI asintoticamente stabile è anche *globalmente* asintoticamente stabile.
- In un sistema LTI, la attrattività comporta la stabilità, e la instabilità comporta la divergenza (cioè la illimitatezza) dei movimenti.
- In un sistema LTI asint. stabile, tutti i modi convergono a zero esponenzialmente.

Nei sistemi nonlineari i fenomeni sono più complessi che nei sistemi lineari:

Esempio: L'equilibrio inferiore di un pendolo è stabile, quello superiore è instabile. Per condizioni iniziali abbastanza prossime all'equilibrio inferiore, se vi è attrito, l'equilibrio inferiore è anche attrattivo, ma esistono condizioni iniziali (l'equilibrio superiore) a partire dalle quali le traiettorie non convergono.

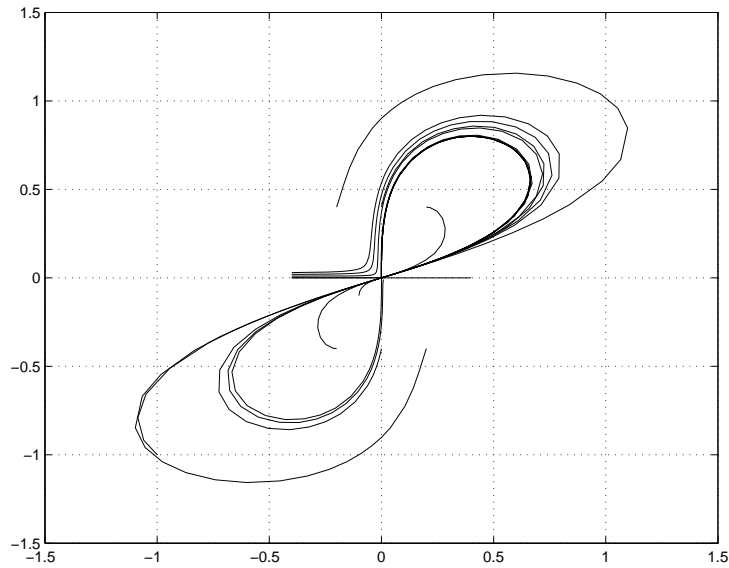
Esempio: Equilibrio attrattivo ma non stabile in TD

$$\mathbf{x}(t+1) = \begin{cases} 2\mathbf{x}(t) & \text{se } \|\mathbf{x}\| \leq 1 \\ 0 & \text{se } \|\mathbf{x}\| > 1 \end{cases}$$

Esempio: Equilibrio attrattivo ma non stabile in TC (Vinograd):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{x_1^2(x_2 - x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)[1 + (x_1^2 + x_2^2)^2]} \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_2^2(x_2 - 2x_1) + x_2^5}{(x_1^2 + x_2^2)[1 + (x_1^2 + x_2^2)^2]} \end{aligned}$$

I movimenti di questo sistema sono descritti da queste curve

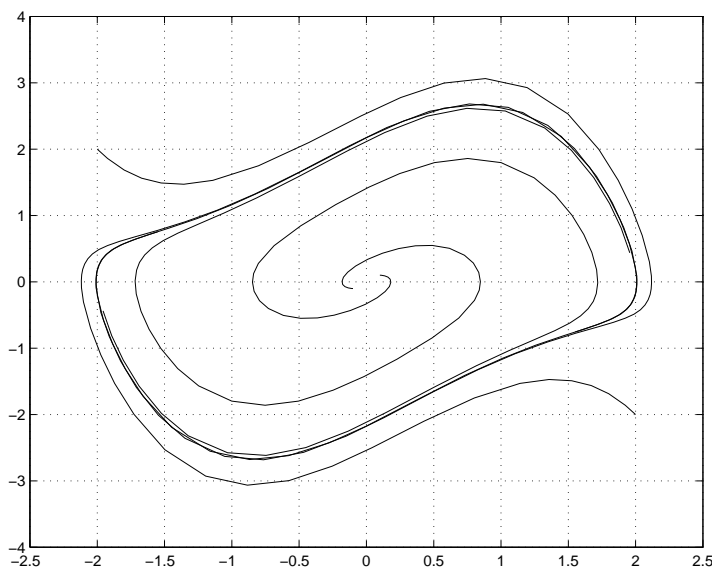


Esempio: Il sistema $\dot{x} = -x^2$, con $x(0) = 1$, ha soluzione $x(t) = (1+t)^{-1}$.
Converge quindi all'equilibrio, ma più lentamente di qualsiasi esponenziale .

Esempio: Equilibrio instabile ma non illimitato in TC (Van der Pol):
L'oscillatore di Van der Pol, in forma normale $\ddot{x} = -(x^2 - 1)\dot{x} - x$, è scritto
in forma di stato

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + (1 - x_1^2)x_2\end{aligned}$$

Il sistema ha un equilibrio nell'origine. Ogni traiettoria però che inizia fuori dall'origine, converge asintoticamente ad una curva chiusa (*ciclo limite*).



L'origine è quindi un equilibrio instabile, ma non divergente.

È quindi necessario, per studiare sistemi nonlineari, disporre di definizioni più articolate di stabilità:

- Il sottoinsieme dello spazio di stato formato dalle condizioni iniziali le cui corrispondenti traiettorie convergono ad un dato equilibrio asintoticamente stabile, è detto *bacino di attrattività* o *regione di asintotica stabilità* (RAS);
- Un equilibrio si dice *globalmente asintoticamente stabile* (GAS) se la sua RAS coincide con tutto lo spazio di stato;
- L'origine si dice *esponenzialmente stabile* per un sistema se, per δ sufficientemente piccoli, esistono due reali positivi α, λ tali per cui $\forall \mathbf{x}(0) : \|\mathbf{x}(0)\| < \delta, \|\mathbf{x}(\mathbf{x}(0), t)\| \leq \alpha e^{-\lambda t}, \forall t > 0$. Il numero λ si dice velocità di convergenza esponenziale. La norma usata è tipicamente la norma 2: $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$.

I più importanti strumenti di cui disponiamo per lo studio della stabilità dei sistemi nonlineari sono i teoremi di Lyapunov:

Metodo indiretto di Lyapunov. Si consideri la approssimazione lineare $D\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ del sistema nonlineare stazionario $D\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$:

1. Se $D\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ è asintoticamente stabile, anche $D\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ lo è (localmente);
2. Se $D\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ha almeno un modo esponenzialmente divergente, anche $D\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ è instabile;

3. Se $D\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ non ha modi esponenzialmente divergenti, ma ne ha almeno uno non convergente, nulla si può dire sulla stabilità di $D\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$;

Si osservi che il caso 2) occorre per sistemi TC se \mathbf{A} ha almeno un autovalore a parte reale strettamente positiva, e per sistemi TD se \mathbf{A} ha almeno un autovalore con modulo strettamente maggiore di uno.

Il caso 3) occorre per sistemi TC se $\mathbf{s}(\mathbf{A}) \subset \text{CLHP}$, con almeno un autovalore a parte reale nulla; per sistemi TD se $\mathbf{s}(\mathbf{A}) \subset \text{CUC}$, con almeno un autovalore a modulo unitario.

Il metodo indiretto, il cui contenuto è abbastanza intuitivo, necessita per la dimostrazione del successivo teorema. È stato presentato prima in quanto metodo di rapida applicazione, anche se di minor potenza, del successivo.

Metodo diretto di Lyapunov (TC, TI). Sia $\mathbf{x} = 0$ un punto di equilibrio per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Si consideri una funzione $V(\mathbf{x}) \in C^1$ positiva definita, e si consideri la sua derivata direzionale lungo il campo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, cioè $L_{\mathbf{f}}V(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Se $L_{\mathbf{f}}V(\mathbf{x})$ è negativa semi-definita, l'origine è stabile; se è negativa definita, l'origine è asintoticamente stabile.

Metodo diretto di Lyapunov (TD, TI). Sia $\mathbf{x} = 0$ un punto di equilibrio per il sistema $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$. Si consideri una funzione $V(\mathbf{x}) \in C$ positiva definita, e si consideri la sua differenza direzionale lungo il campo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, cioè $L_{\mathbf{f}}V(\mathbf{x}) = V(\mathbf{f}(\mathbf{x})) - V(\mathbf{x})$. Se $L_{\mathbf{f}}V(\mathbf{x})$ è negativa semi-definita, l'origine è stabile; se è negativa definita, l'origine è asintoticamente stabile.

Una funzione $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice positiva definita (p.d.) se $V(0) = 0$ e se, per un intorno \mathbf{B}_r dell'origine, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{B}_r \setminus 0, V(\mathbf{x}) > 0$; positiva semi-definita (p.s.d.) se $V(\mathbf{x}) \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{B}_r$; negativa definita e semi-definita risp. se $-V(\mathbf{x})$ è p.d. o p.s.d.; se \mathbf{B}_r può essere esteso a tutto lo spazio, la funzione si dirà *globalmente* p.d., p.s.d., etc.

Esempio: Per $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, V = \mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2$ è globalmente p.d.; $V = \mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 - \mathbf{x}_1^3$ è localmente p.d.; $V = \mathbf{x}_1^2 + \sin^2(\mathbf{x}_2)$ è p.d. localmente, p.s.d. globalmente; $V = \mathbf{x}_1^2 + \sin^2(\mathbf{x}_1)$ è globalmente p.s.d..

Esempio: Tipiche funzioni usate nel teorema di Lyapunov sono le forme quadratiche $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$, con \mathbf{P} matrice $n \times n$. V è p.d. (p.s.d.) se \mathbf{P} è p.d. (p.s.d.). Ai fini della forma quadratica V , la parte antisimmetrica di \mathbf{P} è irrilevante: $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \left(\frac{(\mathbf{P} + \mathbf{P}^T)}{2} + \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{P}^T)}{2} \right) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \left(\frac{(\mathbf{P} + \mathbf{P}^T)}{2} \right) \mathbf{x}$. Assumeremo quindi che \mathbf{P} sia simmetrica. Ricordiamo alcuni criteri (c.n.s.) per stabilire se una matrice è p.d. (p.s.d.):

- $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \neq 0$ ($\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$);
- $\mathbf{s}(\mathbf{A}) \cap \text{CLHP} = \emptyset$ ($\mathbf{s}(\mathbf{A}) \cap \text{OLHP} = \emptyset$);

- $\det(\mathbf{A}(1 : i, 1 : i)) > 0, i = 1, \dots, n$ ($\det(\mathbf{A}_i) \geq 0$, \mathbf{A}_i sottomatrici principali);
- l'angolo formato tra \mathbf{x} e \mathbf{Ax} è strettamente minore di $\pi/2$, $\forall \mathbf{x}$ (minore o uguale se p.s.d.);
- $\exists \mathbf{R}, \det(\mathbf{R}) \neq 0 : \mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ ($\exists \mathbf{R} : \mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$).

L'ultima condizione ci dice che una forma quadratica può essere vista come (il quadrato) di una norma euclidea di un vettore in opportune coordinate: $\mathbf{x}^T \mathbf{Ax} = \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{x} = \mathbf{y}^T \mathbf{y} = \|\mathbf{y}\|^2$, $\mathbf{y} = \mathbf{R} \mathbf{x}$. La scelta di \mathbf{R} non è unica; una particolare determinazione è $\mathbf{R} = \sqrt{\mathbf{A}} = \sqrt{\mathbf{Q} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{Q}^{-1}} = \mathbf{Q} \sqrt{\boldsymbol{\Lambda}} \mathbf{Q}^T$, che è simmetrica e p.d. (p.s.d., risp.).

Dimostrazione del metodo diretto di Lyapunov:

Stabilità: Si consideri un intorno sferico \mathbf{B}_ϵ dell'origine: poiché V è continua e p.d., esiste $m = \min_{\mathbf{x} \in \partial(\mathbf{B}_\epsilon)} V(\mathbf{x})$, ed esisterà un $\mathbf{B}_\delta : V(\mathbf{x}) < m, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{B}_\delta$. Supponiamo per assurdo che una traiettoria del sistema, in $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{B}_\delta$ al tempo t_0 , esca da \mathbf{B}_ϵ per $t > t_0 + \bar{t}$: sarebbe $V(\mathbf{x}(t_0 + \bar{t})) > V(\mathbf{x}(t_0))$, che contraddice $\dot{V} = L_{\mathbf{f}} V \leq 0$.

Asintotica stabilità: si consideri ancora un intorno \mathbf{B}_δ che garantisce che la traiettoria non esca mai da \mathbf{B}_ϵ . Poiché V è limitata inferiormente e strettamente decrescente nel tempo ($\dot{V} = L_{\mathbf{f}} V < 0$), deve tendere ad un limite $\lim_{t \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}(t)) = w \geq 0$. Dobbiamo escludere il caso $w > 0$: se così fosse, infatti, le traiettorie iniziate in \mathbf{B}_δ al tempo t_0 non potrebbero mai entrare in un intorno $\mathbf{B}_w : \max_{\mathbf{x} \in \mathbf{B}_w} V(\mathbf{x}) < w$. Ma, poiché anche \dot{V} è continua e n.d., deve avere un massimo (negativo) $-w_1 < 0$ sull'insieme $\mathbf{B}_\epsilon \setminus \mathbf{B}_w$, quindi V decresce almeno con velocità $|w_1|$. Una traiettoria del sistema, in $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{B}_\delta$ al tempo t_0 , dopo al più $\Delta t = (V(\mathbf{x}_0) - w)/w_1$, porterebbe a $V(t > t_0 + \Delta t) < w$, che contraddice l'ipotesi $w > 0$. Quindi, $w = 0$.

Una funzione $V(\mathbf{x})$ p.d. tale che $L_{\mathbf{f}} V(\mathbf{x})$ è n.s.d., si dice una funzione di Lyapunov per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Nel caso di un sistema non stazionario $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ e di candidata di Lyapunov stazionaria $V(\mathbf{x})$, si dovrà richiedere che $L_{\mathbf{f}} V(\mathbf{x})$ sia *uniformemente* n.d. (cioè che $\exists m > 0 : L_{\mathbf{f}} V(\mathbf{x}) < -m, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{B}_r \setminus 0, \forall t$).

Per studiare la stabilità di sistemi non stazionari, comunque, è spesso necessario usare candidate di Lyapunov non stazionarie $V(\mathbf{x}, t)$. Queste richiedono un trattamento leggermente diverso da quanto visto sinora, che viene lasciato agli approfondimenti di corsi successivi.

Estensione al caso di Globale Asintotica Stabilità

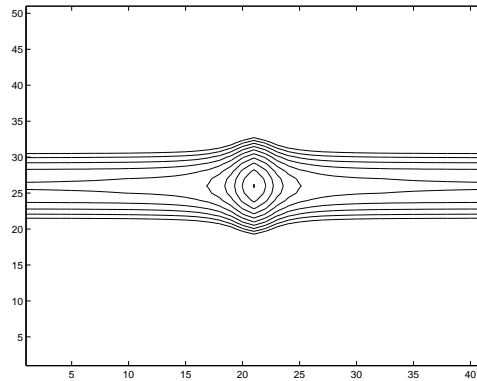
Se, oltre alle ipotesi del metodo diretto di Lyapunov nel caso di asintotica stabilità di un equilibrio, vale anche

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}) = \infty$$

(cioè, se $V(\mathbf{x})$ è radialmente illimitata, e quindi le sue superfici di livello sono chiuse), allora l'equilibrio è anche G.A.S.

La dimostrazione è una diretta riapplicazione del metodo diretto; la condizione di chiusura delle superfici di livello è necessaria per evitare che traiettorie con \mathbf{V} strettamente decrescente possano divergere.

Esempio: Analizzare il sistema $\dot{x}_1 = 2x_2 - 6\frac{x_1}{(1+x_1^2)^2}$; $\dot{x}_2 = -2\frac{x_2-1+x_2}{1+x_1^2}$, mediante una candidata $V(\mathbf{x}) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$ (le cui curve di livello sono qui riportate)



3.1 Teoremi di Lasalle e Krasovskii

Il metodo diretto di Lyapunov non permette di concludere sulla attrattività dell'equilibrio nel caso $L_f V$ sia solo n.s.d.. In questo caso, è assai utile il teorema dell'insieme invariante massimo. Un insieme M è invariante per un sistema dinamico se tutte le traiettorie che contengono punti di M , sono tutte contenute in M . Gli equilibri sono insiemi invarianti, così come ogni traiettoria del sistema (intesa come luogo dei punti descritto da una soluzione $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ al variare di t).

Teorema dell'insieme invariante massimo (Lasalle).

Sia $V(\mathbf{x}) \in C^1$ p.d.* e, per qualche l , le superfici di livello $V(\mathbf{x}) = l$ siano chiuse e delimitino l'insieme limitato $\Omega_l = \{\mathbf{x} | V(\mathbf{x}) < l\}$; sia inoltre $L_f V(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_l$. Siano $R = \{\mathbf{x} \in \Omega_l | L_f V(\mathbf{x}) = 0\}$ e M il massimo (nel senso insiemistico) insieme invariante contenuto in R . Allora, ogni traiettoria $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$ con $\mathbf{x}_0 \in \Omega_l$ converge all'insieme M (cioè, $\lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{\mathbf{m}(t) \in M} \|\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{m}\| = 0$).

Dimostrazione. $V(x(t))$ è non crescente, limitata inferiormente: quindi possiede un limite per $t \rightarrow \infty$. Inoltre $L_f V(\mathbf{x}(t))$ è uniformemente continua rispetto a t e di conseguenza (per il lemma di Barbalat) $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(\mathbf{x}(t)) = 0$. Poiché Ω_l è limitato, la traiettoria non può che tendere a M .

Osservazione Si noti che il teorema vale per funzioni V non esplicitamente dipendenti dal tempo. Nel caso fosse $V(\mathbf{x}, t)$, il teorema resta valido nella ulteriore ipotesi che $L_f V(\mathbf{x}(t), t)$ sia uniformemente continua in t , ciò che si può dimostrare ad es. facendo vedere che $\frac{d}{dt} L_f V$ è limitata per ogni t .

Caso particolare (**Teorema di Krasovskii**): se V p.d., $L_f V$ p.s.d., ma R non contiene traiettorie del sistema eccetto che l'equilibrio \Rightarrow questo è stabile asintoticamente.

Esempio:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 - 1) - \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2(\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 - 1)\end{aligned}$$

con $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x}$, loc. A.S. La regione $\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2 < 1$ è compresa nella R.A.S..

Esempio: Sistemi del primo ordine $\dot{x} = -c(x)$, con $c(x)$ una qualsiasi funzione con grafico strettamente nel primo e terzo quadrante ($xc(x) > 0, \forall x \neq 0$). $V(x) = x^2$ mostra la G.A.S. dell'origine (per $\dot{x} = -x^3$, il metodo indiretto non offre risposte)

Esempio:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2(\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2)\end{aligned}$$

con $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \Rightarrow$ origine G.A.S. (quindi unico equilibrio).

Esempio: Equazione di un pendolo

$$mR^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mgR \sin \theta = 0$$

in forma di stato

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\frac{b}{mR^2} \mathbf{x}_2 - \frac{g}{R} \sin \mathbf{x}_1\end{aligned}$$

con equilibri in $\mathbf{x}_2 = 0, \sin(\mathbf{x}_1) = 0$.

Metodo di linearizzazione $\Rightarrow (0, 0)$ A.S. se $b > 0$, inst. se $b < 0$; $(\pi, 0)$ instabile.

Si prenda $V(\mathbf{x}) = \frac{g}{R}(1 - \cos \mathbf{x}_1) + \frac{\mathbf{x}_2^2}{2}$, si ha

$$L_f V(x) = \frac{g}{R} \mathbf{x}_2 \sin \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \left(-\frac{b}{mR^2} \mathbf{x}_2 - \frac{g}{R} \sin \mathbf{x}_1 \right) = -\frac{b}{mR^2} \mathbf{x}_2^2$$

per cui, $b \geq 0$ implica stabilità. Questa funzione di Lyapunov è in effetti una energia meccanica. Da Krasovskii (per $b > 0$) si ha anche la asint. stabilità (ovviamente, per $b = 0$ si ha solo stabilità).

Per il pendolo con costanti $\frac{g}{R} = \frac{b}{mR^2} = 1$, la $V(x) = \frac{1}{2}\mathbf{x}_2^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)^2 + 2(1 - \cos \mathbf{x}_1)$ ha $L_f V(\mathbf{x})$ n.d. \Rightarrow A.S.

Il criterio di Lasalle può essere usato più volte con diverse funzioni V , per raffinare successivamente le stime. Inoltre, si estende al caso globale se $V(\mathbf{x})$ è radialm. illimitata.

Nella sua versione più generale, il teorema di Lasalle può essere usato per determinare anche la attrattività dei cicli limite. Nella formulazione del teorema dell'insieme invariante, l'ipotesi (*) che $V(\mathbf{x})$ sia p.d. non è strettamente necessaria: infatti, se è continua e Ω_l è limitato, $V(\mathbf{x})$ è limitata inferiormente su Ω_l , e tanto basta. Si possono usare $V(\mathbf{x})$ non p.d. e.g. per la stabilità dei cicli limite.

Esempio: (Ciclo limite attrattivo)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1(\mathbf{x}_1^4 + 2\mathbf{x}_2^2 - 10) \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= -\mathbf{x}_1^3 - 3\mathbf{x}_2^5(\mathbf{x}_1^4 + 2\mathbf{x}_2^2 - 10)\end{aligned}$$

L'insieme descritto da $C(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_1^4 + 2\mathbf{x}_2^2 - 10 = 0$ è invariante per questo sistema: infatti

$$L_f C(\mathbf{x}) = -(4\mathbf{x}_1^4 + 12\mathbf{x}_2^6)(\mathbf{x}_1^4 + 2\mathbf{x}_2^2 - 10)$$

si annulla sull'insieme. Il sistema, inizializzato su $C(\mathbf{x}) = 0$, vi rimane, muovendosi in senso orario ($\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2$, ovvero $\dot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{x}_1^3$). Si consideri $V(\mathbf{x}) = C^2(\mathbf{x})$ (che soddisfa le ipotesi di Lasalle ma non è p.d. propriamente): $L_f V = 2C(\mathbf{x})L_f C(\mathbf{x}) \leq 0, \forall \mathbf{x}$, e R è formato dal ciclo limite più l'origine, che sono entrambe insiemi invarianti. L'origine è però instabile: ogni traiettoria che inizi nell'insieme $V(x) < 100$ (che contiene ogni punto interno al ciclo limite, ma esclude l'origine, ed è limitato) converge al ciclo limite.

Applicazione del T.I.I.M.: Stima della R.A.S.

Supponiamo che $V(x)$ sia una funzione di Lyapunov per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ con origine asintoticamente stabile (ma non globalmente), e supponiamo anche che sia $L_f V(\bar{\mathbf{x}}) < 0$. Chiaramente, questo non garantisce che la traiettoria iniziante in $\bar{\mathbf{x}}$ converga, e che quindi $\bar{\mathbf{x}}$ sia nella regione di asintotica stabilità dell'origine.



Una condizione sufficiente è la seguente:

Una regione chiusa Ω delimitata da una curva di livello $V(\mathbf{x}) = \text{cost.}$, all'interno della quale $V(\mathbf{x}) > 0$ e $L_f V(\mathbf{x}) < 0$, è compresa nella R.A.S..

Con funzioni di Lyapunov quadratiche, o comunque unimodali (cioè con un solo minimo), è quindi possibile ottenere una stima della RAS di un equilibrio cercando la più ampia curva $V(\mathbf{x}) = \text{cost.} > 0$ contenuta in una regione $L_f V(\mathbf{x}) = \text{cost.} < 0$

Il criterio diretto di Lyapunov è solo sufficiente: se non conosco una funzione di Lyapunov, non posso concludere nulla. Esiste peraltro una serie di teoremi inversi, di importanza soprattutto teorica, tra i quali:

Teoremi di Lyapunov inversi Se l'origine è un equilibrio stabile per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, allora esiste una funzione di Lyapunov $V(\mathbf{x})$ per il sistema. Se A.S., allora esiste con $L_f V(\mathbf{x})$ n.d.; se E.S., allora esiste quadratica, $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ (ed anche il linearizzato approx. è A.S.).

In taluni casi si può dover dimostrare la instabilità di un sistema. Abbastanza ovviamente, se si dispone di una V p.d. e si verifica $L_f V$ anch'essa p.d., si avrà instabilità. Ma vi sono risultati più precisi. Il primo teorema rinuncia alla definitezza di $V(\mathbf{x})$:

Teorema di instabilità di Lyapunov. Sia $V(\mathbf{x}) \in C^1$, $V(0) = 0$, e $L_f V(\mathbf{x})$ p.d.. Se $V(\mathbf{x})$ può assumere valori positivi arbitrariamente vicino all'origine, l'equilibrio nell'origine è instabile.

Nel secondo, si rinuncia anche alla definitezza di $L_f V(\mathbf{x})$:

Teorema di instabilità di Cetaev. Sia $V(\mathbf{x}) \in C^1$. Se, dato un intorno del punto di equilibrio nell'origine W , esiste un insieme aperto A tale che

- $0 \in \partial(A) \cup A$
- $\forall \mathbf{x} \in A \cap W$, $V(\mathbf{x} \neq 0) > 0$ e $L_f V(\mathbf{x} \neq 0) > 0$;
- Per $\mathbf{x} = 0$ e $\forall \mathbf{x} \in \partial(A) \cap W$, $V(\mathbf{x}) = 0$

allora l'equilibrio è instabile per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

3.2 Altre estensioni

I criteri di Krasovskii e di instabilità di Lyapunov si estendono in modo ovvio al TD. Le dimostrazioni di questi criteri sono analoghe a quelle già viste in TC.

Velocità di convergenza. Nelle applicazioni, è importante determinare se la convergenza all'equilibrio è più o meno veloce: se è esponenziale innanzitutto, e con quale esponente nel caso che lo sia. Se si riesce a determinare una relazione tra una funzione di Lyapunov e la sua derivata direzionale del tipo

$$L_f V(\mathbf{x}) \leq -\lambda V(\mathbf{x}), \quad \lambda > 0$$

si ha che lungo le traiettorie $\dot{V}(t) + \lambda V(t) = Z(t) \leq 0$, quindi $V(t) \leq e^{-\lambda t} V(0)$ (infatti la soluzione di $\dot{V} = -\lambda V + Z(t)$ è $V(t) = e^{-\lambda t} V(0) + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} Z(\tau) d\tau$, e l'integrale è non positivo). Se $V(\mathbf{x})$ è una norma di \mathbf{x} , cioè se esistono due reali positivi a_l e a_u tali che $a_l \|\mathbf{x}\| \leq V(\mathbf{x}) \leq a_u \|\mathbf{x}\|$, si ha dunque che la convergenza è esponenziale con velocità (almeno) λ (infatti $\|\mathbf{x}(\mathbf{x}(0), t)\| \leq \frac{a_u \|\mathbf{x}(0)\|}{a_l} e^{-\lambda t}$).

Nel caso TD si ha analogamente che $V(\mathbf{x}(t+1)) < \lambda V(\mathbf{x}(t))$ con $\lambda < 1$ implica, se $V(\mathbf{x})$ è una norma, la convergenza esponenziale $\|\mathbf{x}(\mathbf{x}(0), t)\| \leq \frac{a_u V(0)}{a_l} \lambda^t$.

Problemi di controllo:

Per $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}$, trovare una legge di retroazione degli stati sugli ingressi $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ tale che per il nuovo sistema autonomo $\dot{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})$ l'origine sia A.S. (stabilizzazione).

Per una candidata di Lyapunov $V(\mathbf{x})$, si ha $\dot{V} = L_f V(\mathbf{x}) + L_g V(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})$: se posso scegliere $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ tale che V sia una funzione di Lyapunov, si è ottenuto lo scopo.

Esempio: Algoritmi per gli zeri di funzioni. Sia $\mathbf{h}(\mathbf{q}) = 0$ un sistema di n equaz. in n incognite; si vuole trovare una legge di aggiornamento delle stime $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}(\mathbf{q})$ che converga agli zeri $\hat{\mathbf{q}}$ a partire da \mathbf{q} suff. vicini a $\hat{\mathbf{q}}$. Si ponga $V(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{h}^T \mathbf{h}}{2}$ e quindi $\dot{V} = \mathbf{h}^T \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{u}$:

A) scegliendo $\mathbf{u}(\mathbf{q}) = -k \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{h}(\mathbf{q})$ con $k > 0$, si ha $\dot{V} = -k \mathbf{h}^T \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{h}$ n.s.d.. Questa tecnica è nota nel calcolo numerico come metodo del gradiente (o "steepest descent").

B) scegliendo (dove possibile!) $\mathbf{u}(\mathbf{q}) = -k \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{q})$ si ha $\dot{V} = -k \mathbf{h}^T \mathbf{h} = -k V(\mathbf{q})$ n.d.. Questa tecnica è nota come metodo di Newton–Raphson, e garantisce convergenza esponenziale con velocità k (quindi arbitrariamente veloce).

L'analisi della convergenza del metodo (A), e della fattibilità del metodo (B), dipendono dalla invertibilità del jacobiano $\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}}$. In un intorno sufficientemente piccolo di una soluzione isolata del sistema di equazioni, questo è garantito, ma non in grande: i metodi possono non convergere, o convergere a minimi locali.

Esempio TD. Riconsideriamo la soluzione di equazioni algebriche non-lineari $\mathbf{h}(\mathbf{q})$, ma tenendo conto della realizzazione in TD, cioè l'aggiornamento sia dato da $\mathbf{q}(t+1) = \mathbf{q}(t) + u(t)$.

Sia $V(\mathbf{q}) = \mathbf{h}^T \mathbf{h}$, la differenza direz. è

$$\Delta V = L_f V(\mathbf{q}) = \mathbf{h}^T(\mathbf{q}(t+1))\mathbf{h}(\mathbf{q}(t+1)) - \mathbf{h}^T(\mathbf{q}(t))\mathbf{h}(\mathbf{q}(t)).$$

Per $u(t)$ suff. piccoli, si ha

$$\mathbf{h}(t+1) = \mathbf{h}(\mathbf{q}(t)) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} u(t) + O(u^2(t)),$$

quindi

$$\Delta V = 2\mathbf{h}^T \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} u(t) + O(u^2(t)).$$

Scegliendo

$$u(t) = -k \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \mathbf{h}(\mathbf{q}(t))$$

ovvero

$$u(t) = -k \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{q}} \right)^{-1} \mathbf{h}(\mathbf{q}(t)),$$

si ha convergenza locale per k piccoli. È evidente che per k elevati, questa analisi non è più valida.

In casi abbastanza generali vale il **Teorema di Artstein-Sontag**: Se per $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u$, $\mathbf{f}(0) = 0$, esiste $V(\mathbf{x})$ p.d. tale che $L_g V(\bar{\mathbf{x}}) = 0 \Rightarrow L_f V(\bar{\mathbf{x}}) < 0$, allora la retroazione

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{se } L_g V(\mathbf{x}) = 0 \\ -\frac{L_f V}{L_g V} - \frac{\sqrt{(L_f V)^2 + (L_g V)^4}}{L_g V} & \text{altrove} \end{cases}$$

stabilizza globalmente asintoticamente il sistema nell'origine. In effetti, l'esistenza di una $V(x)$ siffatta (detta *funzione di Lyapunov di controllo*) è condiz. anche necessaria, se si vuole $u(\mathbf{x})$ (quasi) liscia.

Esempio Si consideri il sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ -\mathbf{x}_2^3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

e la candidata funzione di Lyapunov di controllo $V = \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2}$.

Si ha $L_f V = 2(\mathbf{x}_1^2 - \mathbf{x}_2^4)$ e $L_g V = 2\mathbf{x}_1^4$, per cui le condizioni del teorema di A-S sono verificate.

La retroazione stabilizzante (C^∞ quasi ovunque) è

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x}_1 = 0 \\ -\frac{(\mathbf{x}_1^2 - \mathbf{x}_2^4)}{\mathbf{x}_1^4} - \frac{\sqrt{16\mathbf{x}_1^{16} + 2(\mathbf{x}_1^2 - \mathbf{x}_2^4)}}{2\mathbf{x}_1^4} & \mathbf{x}_1 \neq 0 \end{cases}$$

Stabilità dei sistemi LTITC con Lyapunov.

Per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, si consideri la funzione quadratica candidata di Lyapunov $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}$, e

$$\dot{V} = 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\dot{\mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P})\mathbf{x} \stackrel{def}{=} -\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x}.$$

dove definiamo $-\mathbf{Q}$ la parte simmetrica di $2\mathbf{P}\mathbf{A}$.

Il sistema sarà stabile se, per \mathbf{P} p.d., anche \mathbf{Q} risulterà p.s.d., e asintoticamente stabile se \mathbf{Q} è p.d. In generale, preso \mathbf{P} arbitrariamente, \mathbf{Q} non risulterà definita.

Conviene procedere in questo caso in senso inverso: fissiamo \mathbf{Q} p.d., e cerchiamo \mathbf{P} risolvendo $\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$. Questa è una equazione matriciale che simboleggia un sistema di $n(n+1)/2$ equazioni lineari in $n(n+1)/2$ incognite (che potrebbe essere riscritto quindi come $\mathbf{M}\mathbf{p} = \mathbf{q}$, dove \mathbf{p} e \mathbf{q} sono vettori a $n(n+1)/2$ componenti formati ad es. giustapponendo le colonne di \mathbf{P} e \mathbf{Q}). Si dimostrerà che il sistema ha soluzione (unica) \mathbf{P} p.d. se e solo se $s(\mathbf{A}) \subset \text{OLHP}$.

La soluzione esiste: infatti se \mathbf{A} è asint. stabile, posso porre

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} dt$$

e quindi verificare che

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} &= \int_0^\infty (\mathbf{A}^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} + e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t} \mathbf{A}) dt \\ &= \int_{t=0}^{t=\infty} d(e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A} t}) = -\mathbf{Q} \end{aligned}$$

Poichè la soluzione del problema $\mathbf{M}\mathbf{p} = \mathbf{q}$ esiste per qualsiasi \mathbf{q} , lo spazio nullo di \mathbf{M} è vuoto, quindi la soluzione è unica.

Stabilità dei sistemi LTITD con Lyapunov.

Per il sistema $\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$, si consideri $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}$, e

$$\begin{aligned} L_f V &= \mathbf{x}^T(t+1)\mathbf{P}\mathbf{x}(t+1) - \mathbf{x}^T(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t) \\ &= \mathbf{x}(t)^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}) \mathbf{x}(t) \\ &\stackrel{def}{=} -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \end{aligned}$$

L'equazione $-\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P}$ è detta equaz. di Lyapunov t.d.: si procede anche in questo caso alla soluzione per \mathbf{P} dato \mathbf{Q} , soluzione che esiste ed è unica se e solo se $\mathbf{s}(\mathbf{A}) \subset \text{OUC}$. La soluzione è

$$\mathbf{P} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{A}^T)^k \mathbf{Q} \mathbf{A}^{kt}$$

(serie che esiste se i modi di \mathbf{A} convergono), infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} &= \mathbf{A}^T \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \right) \mathbf{A} - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} \right) \\ &= \mathbf{A}^T \left(\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} + \dots \right) \mathbf{A} - \left(\mathbf{Q} + \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \mathbf{A} + \dots \right) \\ &= -\mathbf{Q} \end{aligned}$$

L'unicità discende ancora dalla linearità dell'equazione negli elementi di \mathbf{P} .

3.3 Dimostrazione del metodo di linearizzazione

Per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x})$, con $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0$, si consideri la funzione candidata di Lyapunov $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$, con \mathbf{P} p.d. soluzione di $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{I}$. Si ha $L_f V = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x})) + (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}))^T \mathbf{P}) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{h}(\mathbf{x})$. Per cui, per $\|\mathbf{x}\|$ sufficientemente piccoli, $\|\mathbf{h}(\mathbf{x})\| < \frac{\|\mathbf{x}\|}{2\|\mathbf{P}\|}$, quindi $L_f V$ n.d.

Supponiamo invece che \mathbf{A} abbia n_1 autovalori a parte reale positiva, e $n_2 = n - n_1$ a parte reale negativa (non zero per il momento). Scegliendo opportunamente la base della rappresentazione di stato, si avrà

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

dove $\mathbf{s}(-\mathbf{A}_1) \subset \text{OLHP}$ e $\mathbf{s}(\mathbf{A}_2) \subset \text{OLHP}$. Consideriamo l'equazione

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{P}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{aligned}(-\mathbf{A}_1)\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1(-\mathbf{A}_1) &= -\mathbf{I} \\ \mathbf{A}_2\mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2\mathbf{A}_2 &= -\mathbf{I}\end{aligned}$$

che ammettono una unica soluzione, d.p.. Se considero una funzione $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$, essa ha dunque $L_fV = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{h}(\mathbf{x})$ p.d., ma $V(\mathbf{x})$ assume valori positivi arbitrariamente vicino all'origine, quindi, per il criterio di Lyapunov, l'equilibrio è instabile.

Nel caso che \mathbf{A} abbia anche qualche autovalore sull'asse immaginario, basterà considerare una diversa scrittura del sistema, $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}) = (\bar{\mathbf{A}} + \epsilon\mathbf{I})\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x})$, così che nessun autovalore di $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} - \epsilon\mathbf{I}$ (pari a quelli di \mathbf{A} meno ϵ) sia sull'asse immaginario ma quelli a parte reale positiva rimangano tali. Ragionando come sopra su $\bar{\mathbf{A}}$, si trova $L_fV = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{h}(\mathbf{x}) + 2\epsilon V(\mathbf{x})$. Nella regione dell'intorno dell'origine contenuta nel cono in cui $V(\mathbf{x}) > 0$ è anche $L_fV > 0$, quindi (ora per Cetaev) si ha instabilità.

Osservazione. Gli autovalori di $\mathbf{A} + \epsilon\mathbf{I}$ (ovvero di $\frac{1}{\rho}\mathbf{A}$) valgono $\lambda_i + \epsilon$ (ovvero $\frac{1}{\rho}\lambda_i$). Quindi, se si risolvono le equazioni (con \mathbf{Q} p.d.)

$$(\mathbf{A} + \epsilon\mathbf{I})^T\mathbf{P} + \mathbf{P}(\mathbf{A} + \epsilon\mathbf{I}) = \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} + 2\epsilon\mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

ovvero

$$\frac{1}{\rho^2}\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$$

e si trova \mathbf{P} p.d., i sistemi hanno autovalori a parte reale minore di $-\epsilon$ (ovvero modulo minore di $1/\rho$).

L'interesse della applicazione del metodo diretto di Lyapunov ai sistemi lineari risiede nel fatto che esso non richiede il calcolo esplicito degli autovalori di \mathbf{A} (che per sistemi di grandi dimensioni è problema difficile). D'altronde, le indicazioni date sono minori, e riguardano solo le proprietà qualitative delle soluzioni. Il risultato è quindi analogo all'utilizzo del criterio di Routh (e la sua controparte TD Jury) per determinare il segno della parte reale delle radici di un polinomio, che, se applicato al polinomio caratteristico di \mathbf{A} , ci dà indicazioni sulla stabilità di $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Un'altra applicazione comune della equazione di Lyapunov riguarda sistemi nonlineari, per i quali la $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{P}\mathbf{x}$ con \mathbf{P} calcolata in base al linearizzato, ma applicata al vero sistema, può dire qualcosa di più sulla R.A.S. di quanto non dica il metodo indiretto da solo.

Costruzione di Krasovski: Per $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, con $\mathbf{x} = 0$ punto di equilibrio, si prenda $V(x) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Se la parte simmetrica del jacobiano

di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, cioè $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})$, è negativa definita (localmente o globalmente), allora si ha asintotica stabilità (locale o globale) (si osservi che $\mathbf{A}(0) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=0}$, è il jacobiano di $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ che appare nel linearizzato).

Infatti, se $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ è n.d., allora $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ è nonsingolare per ogni $\mathbf{x} \neq 0$ (se così non fosse, e fosse $\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{v} = 0$, sarebbe anche $\mathbf{v}^T \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{v} = 2\mathbf{v}^T \mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{v} = 0$, contraddizione). Quindi, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ è invertibile univocamente laddove $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ è definita negativa, cioè l'equilibrio nell'origine è isolato.

Si ha poi

$$L_f V(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T \mathbf{F}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})$$

e dal teorema di Lyapunov segue la tesi.

Si noti che questa tecnica può essere utile per casi in cui il metodo indiretto non dà risultati perchè $\mathbf{A}(\mathbf{0})$ è stabile ma ha autovalori a parte reale nulla: ad esempio, per $\dot{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}^3$.

Simulazioni in Matlab

Il metodo più semplice di simulare i sistemi dinamici in Matlab e' quello di usare le routine di integrazione numerica delle eq. diff. ordin. ODE23, ODE45, etc.:

⤵ help ode23

ODE23 Solve non-stiff differential equations, low order method.

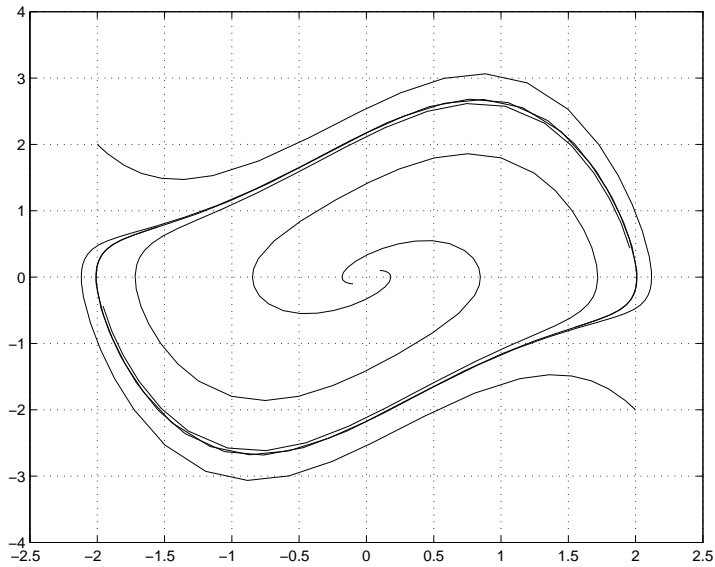
$[T,Y] = \text{ODE23}('F',TSPAN,Y0)$ with $TSPAN = [T0 \text{ TFINAL}]$ integrates the system of differential equations $y' = F(t,y)$ from time $T0$ to $TFINAL$ with initial conditions $Y0$. 'F' is a string containing the name of an ODE file. Function $F(T,Y)$ must return a column vector. Each row in solution array Y corresponds to a time returned in column vector T . To obtain solutions at specific times $T0, T1, \dots, TFINAL$ (all increasing or all decreasing), use $TSPAN = [T0 \ T1 \ \dots \ TFINAL]$.

Si fa uso quindi di funzioni Matlab che devono essere scritte dall'utente usando un normale editor.

% Esempio: oscillatore di Van der Pol

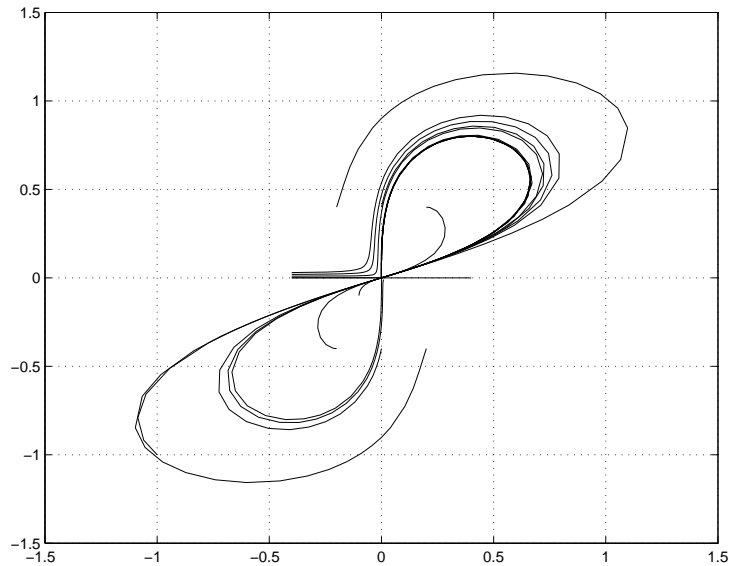
```
>>type vdp.m
function dx = vdp(t,x);
% ODE file for Van der Pol oscillator
dx(1,1) = x(2);
dx(2,1) = -x(1) + (1-x(1)^2)*x(2);
>>[t,x]=ode23(vdp', [0, 10], [.1, .1]);
>>plot(x(:,1), x(:,2), 'g')
```

```
>>hold on; grid
>>[t,x]=ode23('vdp, [0, 10], [-.1, -.1]);
>>plot(x(:,1), x(:,2),'r')
...etc.
>>print -deps vanderpol.eps
```



% Esempio: sistema di Vinograd

```
>>type vinograd.m
function dx = vinograd(t,x);
% ODE file for Vinograd system
x1=x(1);
x2=x(2);
r=x1^2+x2^2;
q=1+(x1^2+x2^2)^2;
dx(1,1) = x1^2*(x2-x1)+x2^5;
dx(2,1) = x2^2*(x2-2*x1);
dx=dx/(r*q);
```

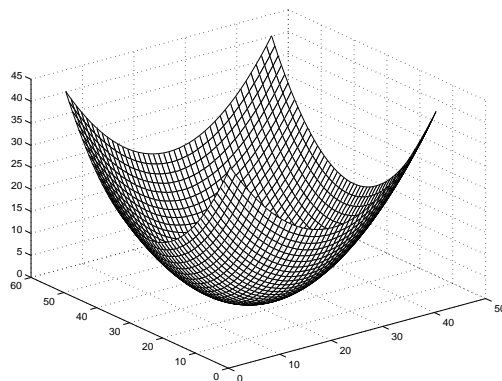



llllhelp meshgrid

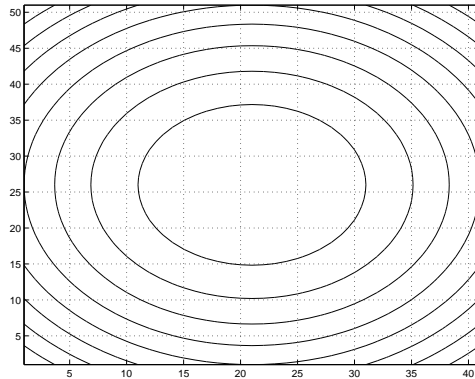
MESHGRID X and Y arrays for 3-D plots. $[X,Y] = \text{MESHGRID}(x,y)$ transforms the domain specified by vectors x and y into arrays X and Y that can be used for the evaluation of functions of two variables and 3-D surface plots. The rows of the output array X are copies of the vector x and the columns of the output array Y are copies of the vector y .

$[X,Y] = \text{MESHGRID}(x)$ is an abbreviation for $[X,Y] = \text{MESHGRID}(x,x)$. $[X,Y,Z] = \text{MESHGRID}(x,y,z)$ produces 3-D arrays that can be used to evaluate functions of three variables and 3-D volumetric plots.

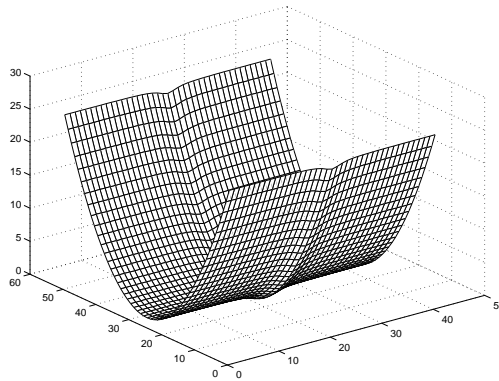
```
>>[X,Y]=meshgrid(-10:.5:10, -5:.2:5);  
>>V=0.2*X.^2 + Y.^2;  
>>mesh(V)  
>>print -deps mesh.eps
```



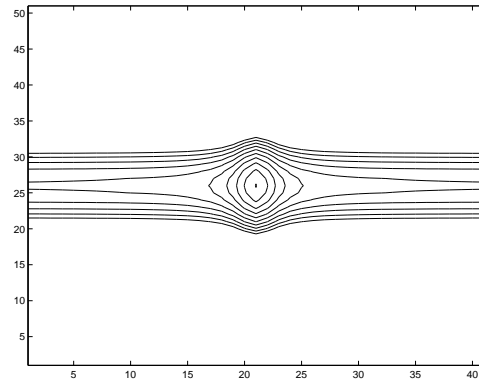
```
>>contour(V)
>>grid
>>print -deps contour.eps
```



```
>>V=(X.^2)./(1+X.^2) + Y.^2;
>>mesh(V)
>>print -deps mesh2.eps
```



```
>>contour(V)
>>contour(V,[0.01:.2:2])
>>print -deps contour2.eps
>>diary off
```



>>diary off

4 Criteri algebrici di stabilità.

Con tale nome vengono indicati i metodi che consentono di conoscere la posizione delle radici di una equazione polinomiale senza risolvere l'equazione stessa.

4.1 Criterio di Routh

Si tratta di una importante generalizzazione del noto criterio di Descartes, per il quale le radici di un polinomio di secondo ordine $a_0 + a_1s + a_2s^2$ sono tutte a parte reale negativa se e solo se i coefficienti hanno tutti lo stesso segno.

La analoga condizione che tutti i coefficienti di un polinomio di ordine n

$$\pi(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

siano dello stesso segno e' anch'essa ovviamente necessaria, ma non sufficiente (ad esempio, $\pi(s) = s^3 + s^2 + s + 1$ ha radici -1 e $\pm j$).

Una condizione necessaria e sufficiente è invece fornita dal criterio di Routh-Hurwitz. Data l'equazione caratteristica

$$\pi(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

poniamo per comodità di notazione $b_0 = a_n$, $b_1 = a_{n-1}$, etc. (cioè $b_i = a_{n-i}$), riscrivendo quindi

$$\pi(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n = 0.$$

Si noti che possiamo assumere $b_0 \neq 0$.

Si costruisca la *tabella di Routh* come segue

$$\begin{array}{cccc} b_0 & b_2 & b_4 & \dots \\ b_1 & b_3 & b_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

La tabella ha $n + 1$ righe, e struttura determinata (a partire dalle prime due righe note) secondo la seguente regola: gli elementi della generica riga

l sono determinati a partire da quelli delle due righe precedenti (h e k) con l'algoritmo

$$l_i = -\frac{1}{k_1} \det \left(\begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{bmatrix} \right) = h_{i+1} - \frac{h_1}{k_1} k_{i+1}$$

Quindi nel calcolo di l_i si richiedono i valori della prima e della $i + 1$ -esima colonna delle due righe precedenti. Se la $i + 1$ colonna non è stata definita, si considerano zero i suoi elementi. Pertanto, sulla destra delle righe si avrà un numero crescente di zeri nel progredire dell'algoritmo verso la $n + 1$ riga: questi zeri tipicamente vengono omessi dalla tabella. Se a qualche livello risulta $k_1 = 0$, l'algoritmo non può essere applicato, si interrompe e la tabella si dice *non ben definita*.

Diciamo che una tabella di Routh è ben definita se tutti gli elementi della prima colonna sono diversi da zero. Vale il seguente

Criterio di Routh *Un sistema LTITC con polinomio caratteristico $\pi(s)$ come sopra è asintoticamente stabile se e solo se la sua tabella di Routh è ben definita e tutti gli elementi della prima colonna della tabella hanno lo stesso segno.*

Se la tabella è ben definita, e ci sono m cambiamenti di segno, allora il polinomio ha m radici positive. Il criterio di Routh può essere esteso anche al caso di tabelle non ben definite nel seguente modo:

1. quando il primo termine di una riga è nullo, si può applicare il criterio di Routh all'equazione in questione moltiplicata per $(s + a)$, essendo a un numero positivo;
2. quando tutti i termini di una riga sono nulli. In questo caso il sistema possiede radici immaginarie pure, radici reali di segno opposto o un numero pari di radici simmetriche rispetto all'origine e per l'applicazione del criterio di Routh occorre scrivere, al posto della riga in questione, i coefficienti della derivata del polinomio avente per coefficienti i termini della riga precedente (*polinomio ausiliario*). Le radici immaginarie pure, reali di segno opposto o simmetriche rispetto all'origine sono le radici di tale polinomio.

Esempio 1: $\pi(s) = s^5 + 15s^4 + 85s^3 + 225s^2 + 274s + 120 = 0$

1	85	274
15	225	120
70	266	
168	120	
216		
120		

Non essendovi cambiamenti di segno nella prima colonna, le radici del polinomio hanno tutte parte reale negativa.

Esempio 2: $\pi(s) = s^4 + s^3 + 5s^2 + 4s + 4 = 0$

s^4	1	5	4
s^3	1	4	
s^2	1	4	
s	0	0	
s	2	0	
s^0	4		

Il polinomio ausiliario è $s^2 + 4$ e $\frac{d}{ds}(s^2 + 4) = 2s$ (nota: è conveniente in questi casi giustapporre sulla sinistra una colonna con le potenze decrescenti della variabile s , che indica il grado massimo del polinomio corrispondente ad ogni riga). Le radici del polinomio ausiliario sono immaginarie pure ($s = \pm j2$). Non essendovi cambiamenti di segno nella prima colonna, le altre radici hanno tutte parte reale negativa. Un sistema avente tale polinomio come polinomio caratteristico risulta stabile a meno di una oscillazione non smorzata avente pulsazione di 2 rad/sec.

Esempio 3: $\pi(s) = s^6 + s^5 - 2s^4 - 3s^3 - 7s^2 - 4s - 4$

s^6	1	-2	-7	-4
s^5	1	-3	-4	
s^4	1	-3	-4	
s^3	0	0		
s^3	4	-6		
s^2	-1.5	-4		
s	-16.67	0		
s^0	-4			

Il polinomio ausiliario è $s^4 - 3s^2 - 4$ e $\frac{d}{ds}(s^4 - 3s^2 - 4) = 4s^3 - 6s$. Le radici del polinomio sono $s = \pm j$ e $s = \pm 2$. La prima colonna presenta una variazione di segno quindi esiste una radice positiva (+2). Il sistema avente tale polinomio come polinomio caratteristico risulta instabile.

Il criterio di Routh-Hurwitz può essere applicato per determinare la regione in cui alcuni parametri possono variare. Ad esempio, per il sistema

$$s^3 + (2 + a)s^2 + (1 + 2a)s + a + b$$

la tabella di Routh è data da

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 + 2a \\ 2 + a & a + b \\ \frac{2(a+1)^2 - b}{2+a} & \\ a + b & \end{array}$$

Per cui il sistema è asintoticamente stabile purchè valga $a > -2$, $2(a+1)^2 > b$, e $a > -b$. Se si applicasse solo la condizione necessaria alla stabilità asintotica analoga al teorema di Descartes (cioè si richiedesse solo che i coefficienti siano tutti positivi), si avrebbero le tre condizioni $a > -2$, $a > -1/2$, e $a > -b$, che chiaramente sono meno stringenti.

4.2 Criterio di Kharitonov

Nelle applicazioni, accade spesso che i parametri del modello siano incerti, ma si possa stabilire per essi un massimo campo di variazione. Cosa si può dire delle radici di un polinomio i cui coefficienti siano incerti, ma limitati in dati intervalli?

Supponiamo ad esempio che il polinomio caratteristico sia

$$\pi(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n$$

e indichiamo con $b = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n]$ il vettore dei suoi coefficienti. Per ciascuno di essi sia noto l'intervallo massimo di variazione: $b_i^{min} \leq b_i \leq b_i^{max}$. Vi sono ovviamente infiniti possibili polinomi caratteristici, e la determinazione della asintotica stabilità dei sistemi corrispondenti appare difficile. Vale comunque (piuttosto sorprendentemente) il seguente

Criterio di Kharitonov. Si definiscano quattro polinomi “angolari” con vettore dei coefficienti

$$\begin{array}{l} b_A(s) = \left[\begin{array}{cccccc} b_0^{max} & b_1^{max} & b_2^{min} & b_3^{min} & b_4^{max} & b_5^{max} & b_6^{min} \dots \end{array} \right] \\ b_B(s) = \left[\begin{array}{cccccc} b_0^{min} & b_1^{min} & b_2^{max} & b_3^{max} & b_4^{min} & b_5^{min} & b_6^{max} \dots \end{array} \right] \\ b_C(s) = \left[\begin{array}{cccccc} b_0^{max} & b_1^{min} & b_2^{min} & b_3^{max} & b_4^{max} & b_5^{min} & b_6^{min} \dots \end{array} \right] \\ b_D(s) = \left[\begin{array}{cccccc} b_0^{min} & b_1^{max} & b_2^{max} & b_3^{min} & b_4^{min} & b_5^{max} & b_6^{max} \dots \end{array} \right] \end{array}$$

Le radici del polinomio $\pi(s)$ sono tutte a parte reale negativa per qualsiasi valore dei coefficienti di $\pi(s)$ negli intervalli dati, **se e solo se** sono tutte a parte reale negativa le radici dei quattro polinomi angolari corrispondenti.

Ovviamente, l'applicazione del criterio alla stabilità dei sistemi con parametri incerti in intervalli si riduce alla applicazione di un criterio di asintotica stabilità ai soli quattro polinomi angolari. Ciò può essere fatto applicando il criterio di Routh, o anche trovando numericamente tutte le soluzioni.

Esercizio: applicare il criterio di Kharitonov al polinomio

$$\pi(s) = b_0s^5 + b_1s^4 + b_2s^3 + b_3s^2 + b_4s + b_5$$

di cui nell'esempio precedente, con intervalli dati da

$$\begin{aligned} 0.9 &\leq b_0 \leq 1.1 \\ 13.5 &\leq b_1 \leq 16.5 \\ 76.5 &\leq b_2 \leq 93.5 \\ 202.5 &\leq b_3 \leq 247.5 \\ 246.6 &\leq b_4 \leq 301.4 \\ 108 &\leq b_5 \leq 132 \end{aligned}$$

I quattro polinomi angolari sono:

$$b_A(s) = 1.1s^5 + 16.5s^4 + 76.5s^3 + 202.5s^2 + 301.4s + 132 = 0$$

$$b_B(s) = 0.9s^5 + 13.5s^4 + 93.5s^3 + 247.5s^2 + 246.6s + 108 = 0$$

$$b_C(s) = 1.1s^5 + 13.5s^4 + 76.5s^3 + 247.5s^2 + 301.4s + 108 = 0$$

$$b_D(s) = 0.9s^5 + 16.5s^4 + 93.5s^3 + 202.5s^2 + 246.6s + 132 = 0$$

Si può verificare con il criterio di Routh che tali polinomi hanno tutti parte reale negativa. Dunque, per il criterio di Kharitonov, le radici del polinomio di partenza hanno parte reale negativa per tutti i valori assunti dai coefficienti negli intervalli sopra specificati.

4.3 Criterio di Gershgorin

Un criterio con analoghi caratteri di “robustezza” che si applica direttamente agli elementi di una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ che sia “quasi” diagonale, cioè $\mathbf{A} = \Lambda + \mathbf{F}$ con Λ diagonale, \mathbf{F} nulla sulla diagonale e sufficientemente piccola, si ricava immediatamente dal seguente:

Teorema di Gershgorin Tutti gli autovalori di \mathbf{A} sono contenuti nell'unione di n cerchi centrati in Λ_i e di raggio $r_i = \sum_{j=1}^n |\mathbf{F}_{ij}|$.

Se tutti i cerchi sono contenuti nel semipiano a parte reale negativa, si ha quindi la asintotica stabilità del sistema LTITC che ha \mathbf{A} come matrice dinamica. Analogo criterio si applica al caso LTITD, considerando l'opportuna regione di stabilità (il cerchio unitario).

Esempio

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.1 & -0.5 \\ 0 & -0.2 & 0.15 \\ 0.1 & 0 & -0.3 \end{bmatrix}$$

La matrice è stabile in TC, in quanto i tre cerchi di Gershgorin sono centrati in $-0.8, -0.2, -0.3$ e hanno raggi rispettivamente di $0.6, 0.15, e 0.1$. La matrice è anche stabile in T.D.: infatti, il criterio può essere applicato alla trasposta di \mathbf{A} , dando così luogo a tre cerchi con gli stessi centri, ma raggi $0.1, 0.1, 0.65$, che sono quindi contenuti nel cerchio unitario.

4.4 Sistemi a tempo discreto

Nel caso di sistemi lineari stazionari a tempo discreto, sarebbe utile un criterio che permetta di stabilire quante sono le radici di un polinomio in z $\pi(z)$ che hanno modulo maggiore di 1. A tale scopo esistono criteri specifici, come ad esempio il *Criterio di Jury*, ma si può utilizzare ancora il criterio di Routh, applicato ad una equazione ausiliaria in s $T(s) = 0$, ottenuta apportando in $\pi(z)$ la seguente sostituzione:

$$z = \frac{1 + s}{1 - s}$$

La trasformazione, detta "bilineare" nel senso che è una funzione razionale fratta, con sia numeratore che denominatore lineari, mappa il cerchio unitario nel semipiano sinistro: infatti, posto $s = \sigma + j\omega$ si ha

$$|z|^2 < 1 \leftrightarrow \frac{(1 + \sigma)^2 + \omega^2}{(1 - \sigma)^2 + \omega^2} < 1$$

e quindi

$$(1 + \sigma)^2 + \omega^2 < (1 - \sigma)^2 + \omega^2$$

cioè $\sigma < 0$. Analogamente si ottiene che la circonferenza è mappata sull'asse immaginario, e che punti esterni al cerchio vanno su punti a parte reale positiva. La trasformazione inversa vale

$$s = \frac{z - 1}{z + 1}$$

Le radici di $\pi(z)$ hanno tutte modulo < 1 se e solo se le soluzioni di $T(s) = 0$ hanno tutte parte reale negativa.

4.5 Esempio

Dato $\pi(z) = 8z^3 + 12z^2 + 6z + 1$, applicando la trasformazione bilineare si ottiene:

$$T(s) = 8 \left(\frac{1 + s}{1 - s} \right)^3 + 12 \left(\frac{1 + s}{1 - s} \right)^2 + 6 \left(\frac{1 + s}{1 - s} \right) + 1$$

Semplificando si ottiene:

$$\pi'(s) = s^3 + 9s^2 + 27s + 27 = 0$$

la cui tabella di Routh è la seguente:

s^3	1	27
s^2	9	27
s	24	
s^0	27	

Tutti gli elementi della prima colonna sono positivi, quindi tutte le radici di $\pi'(s)$ hanno parte reale negativa quindi tutte le radici di $\pi(z)$ hanno modulo < 1 .

4.6 Criterio di Mikhailov

Si consideri il polinomio $\pi(s)$ di grado n e si calcolino i valori che esso assume sull'asse immaginario quando ω varia da 0 a ∞ . È facile dimostrare che il punto rappresentativo di $\pi(j\omega)$ ruota intorno all'origine in senso antiorario (ovvero in senso positivo) di un angolo pari a

$$\phi = (n - 2r) \frac{\pi}{2}$$

dove n è il grado del polinomio $\pi(s)$ e r è il numero di radici con parte reale positiva dell'equazione $\pi(s) = 0$. Per la dimostrazione, basta porre $\pi(j\omega)$ nella forma:

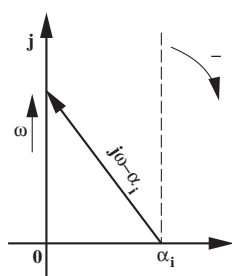
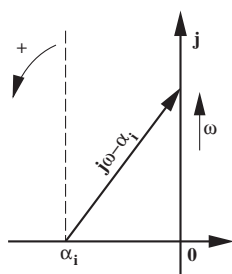
$$a_0(j\omega - \alpha_1)(j\omega - \alpha_2) \dots (j\omega - \alpha_n)$$

e notare che ogni radice reale negativa dá luogo ad una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso positivo ed ogni radice reale positiva ad una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso opposto. Una coppia di radici complesse coniugate con parte reale negativa produce complessivamente una rotazione di π oppure di $-\pi$ se la parte reale è positiva.

Se la curva passa per l'origine vi sono radici con parte reale nulla ed, in particolare, se la curva inizia dall'origine, l'equazione ammette la radice $s = 0$.

Da ciò deriva il seguente criterio:

Condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione algebrica di grado n $\pi(s) = 0$ non abbia radici con parte reale positiva è che la curva rappresentativa della funzione $\pi(j\omega)$ compia attorno all'origine una rotazione di $n\frac{\pi}{2}$ in senso positivo quando ω varia da 0 a ∞ .



Esempio

$$\pi(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 46s^2 + 89s + 260$$

si ottiene la rappresentazione $\pi(j\omega)$ riportata in Figura sotto e quindi $\phi = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}(5 - 2r) = \frac{\pi}{2}$, da cui $r = 2$. $\pi(s)$ ammette quindi due radici di parte reale positiva.

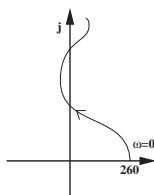
Esempio Per il polinomio:

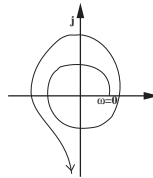
$$\pi(s) = s^7 + 7s^6 + 23s^5 + 37s^4 + 56s^3 + 36s^2 + 12s + 4$$

si ottiene la rappresentazione di Figura sotto e quindi $\phi = 7\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}(7 - 2r) = 7\frac{\pi}{2}$, da cui $r = 0$. $\pi(s)$ non ammette radici di parte reale positiva.

Limitazioni pratiche dei criteri algebrici di stabilità

L'applicazione del criterio di Routh e di altri visti analoghi è in pratica limitata, in quanto essi si prestano male alla sintesi dei sistemi in retroazione. I motivi principali sono i seguenti:





- i criteri algebrici indicano soltanto se le radici sono situate o meno nel semipiano positivo senza precisare la loro posizione. La conoscenza di quest'ultima è indispensabile per lo studio delle caratteristiche dinamiche del sistema.
- quando il grado dell'equazione caratteristica è elevato, l'applicazione diretta del criterio di Routh è difficoltosa;
- questi criteri sono applicabili soltanto quando si conosce l'espressione matematica del modello del sistema, e non sono utilizzabili quando di essa si conosce solo una rappresentazione grafica determinata per via sperimentale.

5 Raggiungibilità e Controllabilità

Un problema di rilievo nella teoria dei sistemi che coinvolge gli stati e gli ingressi è quello del raggiungimento di un desiderato stato finale a partire da un dato stato iniziale, mediante applicazione di un opportuna azione di controllo.

Questo problema ha applicazioni dirette nel senso della pianificazione delle azioni di controllo da esercitare su un sistema in “anello aperto”, cioè basandosi esclusivamente sulla conoscenza a priori del modello del sistema e del suo stato iniziale.

Inoltre, esso ha importantissime conseguenze sulle proprietà ottenibili dal sistema in “anello chiuso”, cioè quando nella scelta del controllo si utilizzino anche misure effettuate sullo stato o sulle uscite.

Nei problemi di pianificazione, ci troveremo spesso di fronte a problemi che possono essere ricondotti a sistemi di equazioni in più incognite, per i quali si pongono i problemi di esistenza delle soluzioni (problema di raggiungibilità) e di non-unicità, e quindi di scelta, tra le soluzioni (problema di controllo ottimo).

Consideriamo un sistema tempo invariante in forma di stato

$$D\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{u}(\cdot) \in U$, dove U è lo spazio di funzioni o successioni in cui è possibile scegliere i controlli. Sia al solito $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}(\cdot), t)$ il valore della soluzione corrispondente a $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ e controllo $\mathbf{u}(\tau), \tau \in [0, t]$, al tempo t .

U può ad esempio rappresentare un insieme di controlli ad ampiezza limitata ($U = \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}(\cdot)\|_\infty \leq 1\}$), o a quadrato sommabile limitato ($U = \{\mathbf{u} \mid \|\mathbf{u}(\cdot)\|_2 \leq 1\}$); la classe più generale usualmente considerata è quella dei controlli quasi-continui (con un numero finito di discontinuità su qualsiasi intervallo finito).

Si definisce insieme dei punti *raggiungibili* al tempo t da \mathbf{x}_0 l'insieme $\{\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \bar{\mathbf{u}} \in U : \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \bar{\mathbf{u}}, t) = \bar{\mathbf{x}}\}$.

5.1 Insieme raggiungibile per un sistema LTITC

Consideriamo l'insieme di raggiungibilità per il sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{17}$$

nell'ipotesi che tutte le componenti dell'ingresso $\mathbf{u}_i(t)$ siano funzioni analitiche in $[0, t]$, cioè funzioni lisce (differenziabili con continuità infinite volte) e

sviluppati in serie di potenze:

$$\mathbf{u}_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}_i^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$$

dove con $\mathbf{u}_i^{(0)}(t)$ si intende la funzione non derivata.

In queste ipotesi, anche la soluzione della equazione differenziale 17 è sviluppabile in serie di potenze:

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$$

Differenziando 17 si ottengono le espressioni delle derivate che appaiono nella serie:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{A}^2\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(1)} \\ \mathbf{x}^{(3)} &= \mathbf{A}^3\mathbf{x} + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(2)} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(k)} &= \mathbf{A}^k\mathbf{x} + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}^{k-i}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(i-1)} \end{aligned}$$

da cui, valutando in $t = 0$ e sostituendo, si ha

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \frac{t^k}{k!} \mathbf{x}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \mathbf{A}^{k-i} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(i-1)} \frac{t^k}{k!}.$$

Scrivendo i primi termini dello sviluppo esplicito delle sommatorie,

$$\mathbf{B}\mathbf{u}t + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u} \frac{t^2}{2} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(1)} \frac{t^2}{2} + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u} \frac{t^3}{3!} + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(1)} \frac{t^3}{3!} + \mathbf{B}\mathbf{u}^{(2)} \frac{t^3}{3!} + \dots$$

si osserva che le somme possono essere riorganizzate in un prodotto matriciale scrivendo

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \left[\mathbf{B} | \mathbf{A}\mathbf{B} | \mathbf{A}^2\mathbf{B} | \dots | \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B} | \dots \right] \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}^{(k)} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}^{(k)} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}^{(k)} \frac{t^{k+3}}{(k+3)!} \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}^{(k)} \frac{t^{k+r}}{(k+r)!} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Si osservi a questo punto che le serie che appaiono nel vettore di infinite componenti a destra convergono agli integrali indefiniti successivi degli ingressi $\mathbf{u}(t)$. Infatti, poichè si è ipotizzato $\mathbf{u}(t)$ liscia, quindi senza impulsi

nell'origine, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(-1)} &\stackrel{def}{=} \int_0^t \mathbf{u}(t_1) dt_1 = \mathbf{u}^{(-1)}(0) + \mathbf{u}^{(0)}(0)t + \mathbf{u}^{(1)}(0)\frac{t^2}{2} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}^{(k)} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(-2)} &\stackrel{def}{=} \int_0^t \int_0^{t_1} \mathbf{u}(t_2) dt_2 dt_1 = \mathbf{u}^{(-2)}(0) + \mathbf{u}^{(-1)}(0)t + \mathbf{u}^{(0)}(0)\frac{t^2}{2} + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}^{(k)} \frac{t^{k+2}}{(k+2)!} \end{aligned}$$

e in generale

$$\mathbf{u}^{(-r)} = \overbrace{\int_0^t \int \dots \int}^{r \text{ volte}} u(\cdot) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{u}^{(k)} \frac{t^{k+r}}{(k+r)!}$$

Si può dunque riscrivere

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, u, t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(0) + \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B} \mid \dots \right] \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{(-1)}(t) \\ \mathbf{u}^{(-2)}(t) \\ \mathbf{u}^{(-3)}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{u}^{(-r)}(t) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Essendo le funzioni di ingresso lisse ma peraltro non vincolate in alcun modo, esse possono assumere valori arbitrari nell'intervallo $[0, t]$. Pertanto, anche i loro integrali valutati al tempo t possono assumere valori arbitrari.

Consideriamo innanzitutto l'insieme degli stati raggiungibili al tempo t a partire dall'origine $x(0) = 0$. Tenendo conto del teorema di Cayley-Hamilton, esso risulta in effetti indipendente da t e vale

$$\mathcal{R} = \text{Im}(\mathbf{R}) \stackrel{def}{=} \text{Im} \left(\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{A}\mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right] \right)$$

L'insieme raggiungibile dall'origine al tempo t è dunque raggiungibile in effetti in tempo arbitrario, lo stesso stato essendo raggiunto in tempo più breve a costo di un più energico controllo. Questo insieme è poi un sottospazio vettoriale, detto *sottospazio di raggiungibilità* del sistema. La matrice R viene detta *matrice di raggiungibilità del sistema*.

L'insieme degli stati raggiungibili a partire dallo stato generico $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ al tempo t è pertanto dato da

$$\mathcal{R}_t(\mathbf{x}_0) = \{ \mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}, \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}_t \}$$

ed è quindi un iperpiano, parallelo al sottospazio di raggiungibilità, passante per $e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0$. Al variare di t , l'insieme raggiungibile descrive una famiglia di iperpiani paralleli, la cui unione costituisce l'insieme degli stati raggiungibili.

Si noti che l'insieme dei punti raggiungibili è l'intero spazio di stato nel caso in cui $\dim(\mathbf{R}) = n$; tutti gli stati sono in effetti raggiungibili in tempo arbitrariamente piccolo. In questo caso, il sistema stesso si dice *completamente raggiungibile*.

5.2 Insieme raggiungibile per un sistema LTITD

Consideriamo l'insieme di raggiungibilità per il sistema

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (18)$$

La soluzione della equazione alle differenze 18 (che indicheremo con $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t)$) è data da

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{A}^{t-k-1} \mathbf{B}u(k)$$

che si può riscrivere nella forma

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{t-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t-1) \\ \mathbf{u}(t-2) \\ \mathbf{u}(t-3) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(0) \end{bmatrix}$$

Consideriamo innanzitutto l'insieme degli stati raggiungibili in t passi a partire dall'origine $\mathbf{x}(0) = 0$:

$$\mathcal{R}_t = \text{Im}(\mathbf{R}_t) \stackrel{def}{=} \text{Im} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}^{t-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \right)$$

che, in modo del tutto analogo al caso TC, viene detto *sottospazio di raggiungibilità in t passi* del sistema, mentre la matrice \mathbf{R} viene detta *matrice di raggiungibilità in t passi del sistema*.

È evidente che il sottospazio di raggiungibilità in $t+1$ passi \mathcal{R}_{t+1} contiene \mathcal{R}_t , e che quindi la successione definita dalle dimensioni dei sottospazi di raggiungibilità al crescere del numero di passi è non decrescente; essa è peraltro

superiormente limitata dalla dimensione dello spazio di stato n , per cui la successione si stabilizzerà in un valore finito. Per il teorema di Cayley–Hamilton, il sottospazio di raggiungibilità in un numero arbitrariamente grande di passi può essere calcolato arrestandosi all' n -esimo passo,

$$\mathcal{R} = \text{Im}(\mathbf{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Im} \left(\left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \right] \right)$$

che viene detto *sottospazio di raggiungibilità* del sistema, mentre la matrice \mathbf{R} viene detta *matrice di raggiungibilità del sistema*. Ogni stato raggiungibile a partire dall'origine in un numero qualsiasi di passi può essere anche raggiunto in non più di n passi.

L'insieme degli stati raggiungibili a partire dallo stato generico $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ al tempo t è pertanto dato da

$$\mathcal{R}_t(\mathbf{x}_0) = \left\{ \mathbf{x} = \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}, \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}_t \right\}$$

ed è quindi ancora un iperpiano, parallelo al sottospazio di raggiungibilità, passante per $\mathbf{A}^t \mathbf{x}_0$.

L'insieme dei punti raggiungibili è l'intero spazio di stato nel caso in cui $\dim(\mathcal{R}) = \text{rank}(\mathbf{R}) = n$. In tal caso, il sistema stesso si dice *completamente raggiungibile*.

5.3 Controllabilità all'origine

Un particolare interesse riveste talvolta il raggiungimento dell'origine dello spazio degli stati, che rappresenta spesso la condizione di riposo o di riferimento per il sistema. Si definisce per questo motivo un ulteriore insieme, l'insieme degli stati *controllabili a zero* al tempo t come

$$\mathcal{C}_t = \left\{ \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{u} \in U : \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t) = 0 \right\}.$$

Esplicitando la definizione nel caso LTITD, si ha

$$0 = \mathbf{A}^t \bar{\mathbf{x}} + \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{A}^{t-k-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k)$$

ovvero, $\bar{\mathbf{x}}$ è controllabile a zero se $-\mathbf{A}^t \bar{\mathbf{x}}$ è raggiungibile dall'origine. Dato uno stato $\bar{\mathbf{x}}$ controllabile a zero in t passi, ogni stato $\bar{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}$ con $\tilde{\mathbf{x}} \in \ker(\mathbf{A}^t)$ lo è anch'esso. L'insieme controllabile a zero in t passi è dunque un sottospazio vettoriale, dato dalla somma (nel senso insiemistico)

$$\mathcal{C}_t = \left\{ \mathbf{x} \mid \hat{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{A}^t \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{R}_t, \bar{\mathbf{x}} \in \ker(\mathbf{A}^t) \right\}$$

Se ogni stato è controllabile a zero in t passi, si dice che *il sistema è controllabile a zero in t passi*. Ciò significa che

$$\text{Im}(\mathbf{A}^t) \subseteq \text{Im}(\mathbf{R}_t)$$

Se esiste un tempo t per il quale questa relazione è soddisfatta, il sistema si dice controllabile. Dal teorema di Cayley–Hamilton segue che un sistema è controllabile se e solo se è controllabile in n passi, quindi se

$$\text{Im}(\mathbf{A}^n) \subseteq \mathcal{R} = \text{Im}([\mathbf{B}|\mathbf{A}\mathbf{B}|\dots|\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}])$$

Naturalmente, la raggiungibilità implica la controllabilità, ma non viceversa. Ad esempio, un sistema con matrice \mathbf{A} nulla è certamente controllabile, mentre non è raggiungibile a meno che vi siano almeno tanti ingressi quanti stati e $\text{rank}(\mathbf{B}) = n$. Controllabilità e raggiungibilità nei sistemi LTITD sono sinonimi se \mathbf{A} è nonsingolare.

Nei sistemi LTITC, l'insieme controllabile a zero in tempo t è definito in modo analogo come l'insieme degli stati che risolvono l'equazione

$$0 = e^{\mathbf{A}t}\bar{\mathbf{x}} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

quindi, per quanto visto sopra, essendo sempre $e^{\mathbf{A}t}$ invertibile $\mathcal{C}_t = \mathcal{R}_t$. Nei sistemi tempo–continui, i concetti di controllabilità e raggiungibilità di uno stato sono coincidenti.

Le proprietà di raggiungibilità e controllabilità non sono alterate da cambiamenti di coordinate (sono proprietà *strutturali*). Si consideri infatti il cambiamento di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$, e il sistema $D\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$, per il quale si ha

$$\hat{\mathbf{R}} = [\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}|\dots|\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}] = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{r}$$

che ha lo stesso rango di \mathbf{R} . Per la controllabilità, basta osservare che anche $(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^t = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{T}$, quindi entrambe i membri dell'equazione che definisce il sottospazio di controllabilità a zero sono premoltiplicati per \mathbf{T}^{-1} .

Date due rappresentazioni in coordinate diverse dello stesso sistema raggiungibile, e note le matrici di raggiungibilità nei due casi, è possibile trovare la matrice che trasforma la prima nella seconda. Infatti avendosi $\hat{\mathbf{R}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}$, si ha $\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}^T = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{R}^T$, da cui (essendo $\hat{\mathbf{R}}$ a pieno rango righe) $\mathbf{T} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{R}}^T(\hat{\mathbf{R}}\hat{\mathbf{R}}^T)^{-1}$.

Nel caso SISO, \mathbf{R} e $\hat{\mathbf{R}}$ sono quadrate e invertibili, per cui si ha semplicemente

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}\hat{\mathbf{R}}^{-1}$$

Si osservi che, per sistemi SISO, la matrice \mathbf{R} è quadrata di dimensione n , quindi se la condizione di completa raggiungibilità per il sistema viene ottenuta, \mathbf{R} è invertibile. Nei sistemi MIMO con m ingressi, invece, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times nm}$. La condizione $\text{rank}([\mathbf{B}|\mathbf{A}\mathbf{B}|\dots|\mathbf{A}^{p-1}\mathbf{B}]) = n$ può ottenersi per qualche $p < n$: il minimo di tali p si dice indice di raggiungibilità del sistema MIMO (nel caso TD, p rappresenta il minimo numero di passi con i quali è possibile raggiungere un punto arbitrario). Perché sia $p < n$ è necessario e sufficiente che sia $\text{rank}(\mathbf{B}) \geq 2$.

5.4 Pianificazione ottima

Come già accennato, qualora il problema di raggiungimento di uno stato \mathbf{x} a partire da \mathbf{x}_0 abbia soluzione per un qualche t , esso può averne infinite. Si desidera adesso indicare una tecnica per trovare una di queste possibili soluzioni, che soddisfi un criterio di ottimalità nel senso di minimizzare una norma del segnale di ingresso applicato.

La norma dei controlli che consideriamo è la norma 2, definita per controlli applicati tra $t = 0$ e $t = T$ in TC come

$$\|\mathbf{u}(\cdot)\|_{2_{[0,t]}} = \int_0^t \mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{W}_u \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

e in TD come

$$\|\mathbf{u}(\cdot)\|_{2_{[0,t]}} = \sum_{\tau=0}^t \mathbf{u}^T(\tau) \mathbf{W}_u \mathbf{u}(\tau)$$

dove la matrice simmetrica e positiva definita \mathbf{W}_u rappresenta un fattore di peso relativo tra i diversi ingressi di un sistema MIMO, utile ad esempio per esprimere correttamente norme di ingressi MIMO i cui canali abbiano dimensioni fisiche diverse. In generale, possiamo pensare che le matrici di peso varino nel tempo (scrivendo quindi $\mathbf{W}_u(\tau)$ nelle espressioni precedenti), restando sempre comunque simmetriche e p.d..

Iniziamo dal caso LTITD. Si desidera risolvere l'equazione

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0 = \mathbf{R}_t \mathbf{u}_t$$

nel vettore incognito $\mathbf{u}_t = [\mathbf{u}(t-1) \dots \mathbf{u}(0)]^T$. Supponendo che una soluzione esista (cioè che $(\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0) \in \mathcal{R}_t$), si desidera trovare

$$\hat{\mathbf{u}}_t = \arg \min_{\mathbf{u}_t} \|\mathbf{u}_t\|_2$$

soggetto a $\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0 = \mathbf{R}_t \mathbf{u}_t$

Si tratta quindi di un problema di minimo vincolato, che può essere risolto con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange:

$$L(\mathbf{u}_t, \lambda) = \mathbf{u}_t^T \mathbf{W}_u \mathbf{u}_t + \lambda^T (\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0 - \mathbf{R}_t \mathbf{u}_t)$$

dove $\mathbf{W} = \text{diag} (\mathbf{W}_u(t-1) \cdots \mathbf{W}_u(0))$.

Ponendo uguale a zero il differenziale di questa espressione rispetto alla incognita \mathbf{u}_t ,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_t} = 2\mathbf{u}_t^T \mathbf{W} - \lambda^T \mathbf{R}_t = 0$$

si ottiene

$$\mathbf{u}_t = \frac{1}{2} \mathbf{W}_u^{-1} \mathbf{R}_t^T \lambda,$$

che sostituita nella soluzione al tempo t dà

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0 = \frac{1}{2} \mathbf{R}_t \mathbf{W}_u^{-1} \mathbf{R}_t^T \lambda,$$

da cui è possibile (per l'ipotesi di esistenza di una soluzione) risolvere per λ : se ad esempio \mathbf{R}_t ha righe indipendenti, si può scrivere

$$\lambda = 2(\mathbf{R}_t \mathbf{W}^{-1} \mathbf{R}_t^T)^{-1} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0)$$

che sostituita nel controllo dà

$$\hat{\mathbf{u}}_t = \mathbf{W}_u^{-1} \mathbf{R}_t^T (\mathbf{R}_t \mathbf{W}^{-1} \mathbf{R}_t^T)^{-1} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{A}^t \mathbf{x}_0)$$

La matrice $\mathbf{W}_u^{-1} \mathbf{R}_t^T (\mathbf{R}_t \mathbf{W}^{-1} \mathbf{R}_t^T)^{-1}$, che nel caso particolare $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ diviene $\mathbf{R}_t^T (\mathbf{R}_t \mathbf{R}_t^T)^{-1}$, è la pseudoinversa (pesata con \mathbf{W}^{-1}) di \mathbf{R}_t : questa definizione è valida se \mathbf{R}_t ha pieno rango colonne, cioè righe indipendenti.

Consideriamo adesso il caso LTITC. Si desidera risolvere l'equazione

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}_t(\tau) d\tau$$

nella funzione incognita $\mathbf{u}_t(\cdot)$ definita tra 0 e t . Supponendo che una soluzione esista (cioè che $\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 \in \mathcal{R}$), si desidera trovare

$$\hat{\mathbf{u}}_t = \arg \min_{\mathbf{u}_t} \|\mathbf{u}_t\|_2$$

soggetto a $\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}_t(\tau) d\tau$

Si tratta quindi di un problema di minimo vincolato di un funzionale rispetto ad una variabile che è una funzione, cioè un problema di calcolo variazionale. Il vincolo può essere messo in conto ancora con la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}_t, \lambda) &= \int_0^t \mathbf{u}_t^T(\tau) \mathbf{W} \mathbf{u}_t(\tau) d\tau + \\ &\quad + \lambda^T \left(\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 - \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}_t(\tau) d\tau \right) \\ &= \int_0^t F(\mathbf{u}_t) d\tau + \lambda^T \left(\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 \right) \end{aligned}$$

dove $F(\mathbf{u}_t, \lambda) = \mathbf{u}_t^T(\tau) \mathbf{W} \mathbf{u}_t(\tau) - \lambda^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}_t(\tau)$, con $\lambda = \text{cost}$.

L'equazione di Eulero per la soluzione del problema variazionale è data da

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{u}}_t} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_t} = 0$$

che in questo caso, essendo $F(\cdot)$ indipendente dalle derivate di \mathbf{u}_t , si semplifica in

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}_t} = 2\mathbf{u}_t^T(\tau) \mathbf{W} - \lambda^T e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} = 0.$$

Da questa si ottiene

$$\mathbf{u}_t(\tau) = \frac{1}{2} \mathbf{W}_u^{-1} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)} \lambda,$$

che sostituita nella soluzione al tempo t dà

$$\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 = \frac{1}{2} \left(\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{W}_u^{-1} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)} d\tau \right) \lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \mathcal{G}_t \lambda$$

La matrice integrale che appare in questa equazione è detta *Gramiano di raggiungibilità* (al tempo t , con peso \mathbf{W}) per il sistema. Si può dimostrare che $\text{rank } \mathcal{G}_t = \text{rank } \mathbf{R} = \dim \mathcal{R}$, $\forall t$. È quindi possibile (per l'ipotesi di esistenza di una soluzione) risolvere questa equazione per λ : se ad esempio \mathcal{G}_t ha righe indipendenti, cioè il sistema è completamente raggiungibile, questa soluzione si può scrivere

$$\lambda = 2 (\mathcal{G}_t)^{-1} (\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0)$$

che sostituita nel controllo dà

$$\hat{\mathbf{u}}_t = \mathbf{W}_u^{-1} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t-\tau)} (\mathcal{G}_t)^{-1} (\mathbf{x}(t) - e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0)$$

5.5 Raggiungibilità di sistemi non LTI

L'analisi della raggiungibilità per sistemi tempo-varianti e nonlineari in generale è sostanzialmente più complessa che nei casi sinora visti. Daremo perciò solo alcune indicazioni generali.

Per un sistema *lineare tempo variante* TC, gli argomenti usati nella dimostrazione della raggiungibilità LTITC possono essere estesi: sviluppando la soluzione di

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (19)$$

con ingresso $\mathbf{u}(t)$ analitico in $[0, t]$, si ha

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{x}^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!}$$

dove

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= \mathbf{A}^2\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{B}}\mathbf{u} \\ \mathbf{x}^{(3)} &= \mathbf{A}^3\mathbf{x} + \mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}\mathbf{x} + \dot{\mathbf{A}}\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{A}\dot{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \dot{\mathbf{B}}\mathbf{u} + \ddot{\mathbf{A}}\mathbf{x} \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Introducendo l'operatore $\Delta \stackrel{def}{=} \left(\mathbf{A} - \frac{d}{dt} \right)$, valutando le derivate in $t = 0$, sostituendo e raccogliendo opportunamente si ottiene, per $\mathbf{x}_0 = 0$

$$\mathbf{x}(0, \mathbf{u}, t) \in \text{Im} \left(\left[\mathbf{B} | \Delta \mathbf{B} | \Delta^2 \mathbf{B} | \dots | \Delta^{r-1} \mathbf{B} | \dots \right] \right)$$

In questo caso non è detto che si possa arrestare la costruzione della matrice all' n -esimo blocco di colonne.

Per sistemi nonlineari la situazione è più complessa. Si può dimostrare che vale il seguente teorema:

Teorema. Se per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ il sistema linearizzato approssimato attorno a $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}$ ($\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = 0$), $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ è raggiungibile, allora l'insieme raggiungibile da $\bar{\mathbf{x}}$ contiene un intorno di $\bar{\mathbf{x}}$.

Quindi, la raggiungibilità (globale) del linearizzato approssimato implica la raggiungibilità (locale) del sistema effettivo. Questa condizione è solo sufficiente: ad esempio, il sistema che rappresenta la cinematica di un veicolo su ruote che avanza con velocità lineare $\mathbf{u}_1 = v$ e angolare $\mathbf{u}_2 = w$, data da

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ w \end{bmatrix}$$

ha un linearizzato (in un equilibrio qualsiasi) con $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$, quindi non è raggiungibile. Comunque, il vero sistema è certamente raggiungibile.

5.6 Approccio geometrico: Sottospazi invarianti

Un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^n$ di dimensione v può essere descritto mediante una sua *matrice di base* \mathbf{V} , cioè una matrice $n \times v$ tale che, $\forall \mathbf{v} \in V, \exists ! \mathbf{y} : \mathbf{v} = \mathbf{V}\mathbf{y}$, ovvero $V = \text{Im}(\mathbf{V})$ (notazione: anche $V = \mathcal{R}(\mathbf{V})$, $V = \text{span}(\mathbf{V})$, o $V = \text{Im}(\mathbf{V})$).

Supponiamo che, in certe coordinate correnti \mathbf{x} , sia $\mathbf{x}_v \in V$. Consideriamo un cambiamento di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$, dove $\mathbf{T} = [\mathbf{V} | \mathbf{V}_c]$ è invertibile, e \mathbf{V}_c rappresenta una matrice $n \times (n - v)$ di colonne indipendenti tra loro e da quelle di \mathbf{V} (cioè una *matrice di base per \mathbb{R}^n complementare a \mathbf{V}*). Se le nuove coordinate di \mathbf{x}_v sono \mathbf{z}_v , cioè se $\mathbf{x}_v = \mathbf{T}\mathbf{z}_v$, allora le ultime $n - v$ coordinate di \mathbf{z}_v sono nulle.

Infatti, suddividendo a blocchi, si deve poter scrivere

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_v = \mathbf{V}\mathbf{y} &= \left[\mathbf{V} \mid \mathbf{V}_c \right] \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{V}\mathbf{z}_1 + \mathbf{V}_c\mathbf{z}_2 \\ \Rightarrow \mathbf{z}_1 &= \mathbf{y}, \mathbf{z}_2 = \mathbf{0}_{n-v \times 1} \end{aligned}$$

Un sottospazio V si dice *invariante* rispetto ad una matrice \mathbf{A} se $\forall \mathbf{v} \in V$, anche $\mathbf{A}\mathbf{v} \in V$. Nelle coordinate \mathbf{T} sopra associate ad un sottospazio, se questo è \mathbf{A} -invariante, la matrice \mathbf{A} ha anch'essa struttura a blocchi, e poiché vale

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x}_v &= \begin{bmatrix} \star \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z}_v = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z}_v \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ \hat{\mathbf{A}}_{21} & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \star \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(dove \star denota un vettore non nullo in generale la cui espressione qui non interessa), deve essere $\hat{\mathbf{A}}_{21} = \mathbf{0}$, cioè

$$\hat{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ \hline 0 & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{array} \right]$$

Esempio: lo spazio generato da un numero qualsiasi di autovettori associati allo stesso autovalore è uno sottospazio invariante; così anche per gli autospazi generalizzati.

Se lo stato iniziale di un sistema LTI $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ appartiene ad un sottospazio \mathbf{A} -invariante, allora tutta la evoluzione libera appartiene allo stesso sottospazio.

Infatti, sia $e^{\mathbf{A}t}$ in TC, che \mathbf{A}^t in TD, mantengono la struttura triangolare a blocchi della matrice \mathbf{A} (supponendo di essersi già posti in coordinate adatte).

Date le condizioni iniziali \mathbf{x}_0 , il più piccolo sottospazio W che contiene tutta la evoluzione libera dello stato è dato da

$$W = \text{Im} \left[\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \mid \cdots \mid \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}_0 \right]$$

(sottospazio ciclico generato da \mathbf{x}_0).

Infatti, nel caso TC, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k \mathbf{x}_0 \\ &= \left[\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{A}\mathbf{x}_0 \mid \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0 \mid \cdots \right] \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \frac{t^2}{2} \\ \vdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Per il teorema di Cayley–Hamilton, se $\pi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$ è il polinomio caratteristico di \mathbf{A} , allora $\pi(\mathbf{A}) = 0$, quindi $\mathbf{A}^k = -a_0 - \dots - a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}$; cioè \mathbf{A}^k (e tutte le successive potenze di \mathbf{A}) sono combinazioni lineari delle prime $n - 1$ potenze; e ciò vale anche a fortiori per $\mathbf{A}^k\mathbf{x}_0$, quindi la tesi.

Nel caso TD, la dimostrazione è del tutto simile, usando la formula della evoluzione libera relativa.

5.7 Sistemi LTI: sottosistemi raggiungibili e non

Il sottospazio di raggiungibilità, sia nel caso LTITC che LTITD, ha una importante caratterizzazione geometrica: esso è il più piccolo sottospazio \mathbf{A} -invariante che contiene $\text{Im}(\mathbf{B})$ (che si denota $\langle \mathbf{A}|\mathbf{B} \rangle$).

È ovvio infatti che $\text{Im}([\mathbf{B}|\mathbf{A}\mathbf{B}|\cdots|\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}])$ contiene $\text{Im}(\mathbf{B})$ e che è \mathbf{A} -invariante. Inoltre, se \mathcal{S} contiene $\text{Im}(\mathbf{B})$ ed è \mathbf{A} -invariante, esso contiene anche $\text{Im}(\mathbf{A}^k\mathbf{B})$, $\forall k$, e quindi $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{R}$.

Sia $\mathbf{T}_R \in \mathbb{R}^{n \times r}$ una matrice di base per il sottospazio di raggiungibilità $\mathcal{R} = \text{Im}(\mathbf{R})$ del sistema LTI

$$D\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u},$$

e $\mathbf{T}_N \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ una matrice di base complementare. Nelle nuove coordinate descritte da

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\mathbf{T}_R \mid \mathbf{T}_N \right] \begin{bmatrix} \mathbf{z}_R \\ \mathbf{z}_N \end{bmatrix}$$

il sistema diviene $D\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{z} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}$, ovvero

$$\begin{bmatrix} D\mathbf{z}_R \\ D\mathbf{z}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_R & \mathbf{A}_{RN} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_R \\ \mathbf{z}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

dove $\mathbf{z}_R \in \mathbb{R}^r$ e $\mathbf{z}_N \in \mathbb{R}^{n-r}$.

In queste coordinate, il sistema è dunque riscritto nella forma

$$\begin{aligned} D\mathbf{z}_R &= \mathbf{A}_R\mathbf{z}_R + \mathbf{A}_{RN}\mathbf{z}_N + \mathbf{B}_R\mathbf{u} \\ D\mathbf{z}_N &= \mathbf{A}_N\mathbf{z}_N \end{aligned} \quad (20)$$

cioè effettivamente decomposto in due sottosistemi, dei quali il secondo, con stato \mathbf{z}_N , evolve autonomamente (secondo la $\mathbf{z}_N(t) = e^{\mathbf{A}_N t}\mathbf{z}_N(0)$, ovvero la $\mathbf{z}_N(t) = \mathbf{A}_N^t\mathbf{z}_N(0)$), quindi non dipende dall'ingresso né direttamente, né indirettamente attraverso lo stato \mathbf{z}_R . Il sottospazio di raggiungibilità del sottosistema \mathbf{z}_N è vuoto.

Per quanto riguarda il sottosistema con stato \mathbf{z}_R e matrici $(\mathbf{A}_R, \mathbf{B}_R)$, esso è completamente raggiungibile: infatti, la matrice di raggiungibilità dell'intero sistema nelle nuove coordinate è

$$\mathbf{R}' = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{B}_R & \mathbf{A}_R\mathbf{B}_R & \cdots & \mathbf{A}_R^{n-1}\mathbf{B}_R \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{array} \right] = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{r}$$

quindi, avendo \mathbf{R}' rango r come \mathbf{R} , le sue prime r righe, le sole non nulle, sono indipendenti. La presenza del termine incrociato \mathbf{A}_{RN} non influenza la raggiungibilità di un arbitrario stato $\mathbf{z}_N(t)$ desiderato a partire da qualsiasi stato iniziale $\mathbf{z}_N(0)$ del sottosistema (in tempo t arbitrario per sistemi TC, e almeno in $t = r$ passi per sistemi TD), essendo questo sottosistema completamente controllabile.

La forma 20 viene detta *forma standard di controllabilità* del sistema. Il sottosistema $(\mathbf{A}_R, \mathbf{B}_R)$ (o $(\mathbf{A}_R, \mathbf{B}_R, \mathbf{C}_R = \mathbf{C}\mathbf{T}_R, \mathbf{D})$ se si include l'equazione di uscita) è detto *sottosistema raggiungibile*; il sottosistema $(\mathbf{A}_N, \mathbf{B}_N, \mathbf{C}_N = \mathbf{C}\mathbf{T}_N, \mathbf{D})$ è detto *sottosistema non raggiungibile*.

La scelta delle matrici di base \mathbf{T}_R e complementare \mathbf{T}_N è arbitraria: qualsiasi matrice $\mathbf{T}'_R = \mathbf{T}_R\mathbf{Q}_R$ e $\mathbf{T}'_N = \mathbf{T}_N\mathbf{Q}_N$, con $\mathbf{Q}_R \in \mathbb{R}^{r \times r}$ e $\mathbf{Q}_N \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ invertibili, potrebbero essere usate per costruire la forma standard. Si avrebbe in tal caso $\mathbf{T}' = [\mathbf{T}'_R\mathbf{Q}_R | \mathbf{T}'_N\mathbf{Q}_N] = \mathbf{T} \text{diag}(\mathbf{Q}_R, \mathbf{Q}_N)$ e la forma standard risultante

$$\left[\begin{array}{c} D\mathbf{w}_R \\ D\mathbf{w}_N \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{Q}_R^{-1}\mathbf{A}_R\mathbf{Q}_R & \mathbf{Q}_R^{-1}\mathbf{A}_{RN}\mathbf{Q}_N \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{Q}_N^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{Q}_N \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{w}_R \\ \mathbf{w}_N \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_R\mathbf{Q}_R \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \mathbf{u}$$

che evidentemente ha blocchi diagonali diversi ma simili (algebricamente equivalenti) a quelli ottenuti in altra base. Gli autovalori di \mathbf{A}_R e quelli di

\mathbf{A}_N sono quindi invarianti in numero e in posizione con i cambiamenti di coordinate, e sono quindi proprietà strutturali del sistema. I primi vengono detti *autovalori interni al sottospazio di raggiungibilità*, i secondi *esterni*.

La funzione di trasferimento di un sistema non dipende dalla sua parte non raggiungibile. Infatti,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \\ &= \left[\mathbf{C}_R \mid \mathbf{C}_N \right] \left[\begin{array}{c|c} s\mathbf{I}_r - \mathbf{A}_R & -\mathbf{A}_{RN} \\ \hline \mathbf{0} & s\mathbf{I}_{n-r} - \mathbf{A}_N \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_R \\ \mathbf{0} \end{array} \right] + \mathbf{D} = \\ &= \left[\mathbf{C}_R \mid \mathbf{C}_N \right] \left[\begin{array}{c|c} (s\mathbf{I}_r - \mathbf{A}_R)^{-1} & \mathbf{M} \\ \hline \mathbf{0} & (s\mathbf{I}_{n-r} - \mathbf{A}_N)^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_R \\ \mathbf{0} \end{array} \right] + \mathbf{D} = \\ &= \mathbf{C}_R (s\mathbf{I}_r - \mathbf{A}_R)^{-1} \mathbf{B}_R + \mathbf{D} \end{aligned}$$

(dove \mathbf{M} indica una matrice il cui calcolo esplicito è superfluo).

Il fatto che la f.d.t di un sistema non dipenda dal sottosistema non raggiungibile, e che quindi il sottosistema non raggiungibile non influenzi il rapporto ingresso-uscita, ha importanti implicazioni. In particolare, tra i poli della $G(s)$ non appariranno gli autovalori di \mathbf{A}_N : ciò significa che questi ultimi vengono sistematicamente cancellati da zeri coincidenti nella espressione

$$G(s) = \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{\det (s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + \mathbf{D}$$

5.8 Verifiche dirette di Raggiungibilità

La condizione di completa raggiungibilità è verificabile per ispezione diretta delle matrici del sistema in alcuni casi.

Se la matrice dinamica \mathbf{A} di un sistema SISO è diagonale, $\mathbf{A} = \operatorname{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, la matrice di raggiungibilità è

$$\mathbf{R} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{B}_1 & \lambda_1 \mathbf{B}_1 & \lambda_1^2 \mathbf{B}_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \lambda_2 \mathbf{B}_2 & \lambda_2^2 \mathbf{B}_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \mathbf{B}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{B}_n & \lambda_n \mathbf{B}_n & \lambda_n^2 \mathbf{B}_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \mathbf{B}_n \end{array} \right]$$

Perchè questa sia di pieno rango, è necessario che tutte le componenti di \mathbf{B} siano diverse da zero, e che tutti gli autovalori siano distinti (si avrebbero

altrimenti righe nulle o righe proporzionali). Queste condizioni sono anche sufficienti: infatti si può riscrivere

$$\mathbf{R} = \text{diag}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n) \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

ed il determinante della matrice a destra (che è una matrice di Vandermonde) non si annulla per λ_i distinti.

Nel caso più generale di sistema MIMO con forma di Jordan nota, la verifica di raggiungibilità può essere fatta ricorrendo al *Lemma P.B.H.* (Popov, Belevitch, Hautus):

Teorema Il sistema LTI con matrici (\mathbf{A}, \mathbf{B}) è raggiungibile se e solo se la matrice

$$\mathbf{P}(\lambda) = \left[\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \right] \quad (21)$$

ha rango pieno per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. Basterà considerare $\lambda = \lambda_i \in s(\mathbf{A}), \forall i$. Supponiamo che per qualche λ_i , $\text{rank}(P(\lambda_i)) < n$: allora esisterà un vettore $\mathbf{q} \neq 0$ tale che $\mathbf{q}^T \mathbf{P}(\lambda_i) = 0$, ovvero tale che al contempo

$$\mathbf{q}^T \mathbf{B} = 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{q}^T \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{q}^T \quad (22)$$

Postmoltiplicando la seconda per \mathbf{B} , si ha

$$\mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \lambda_i \mathbf{q}^T \mathbf{B} = 0$$

e postmoltiplicando per $\mathbf{A} \mathbf{B}$ si ha

$$\mathbf{q}^T \mathbf{A}^2 \mathbf{B} = \lambda_i \mathbf{q}^T \mathbf{A} \mathbf{B} = 0$$

Iterando questa procedura, si trova che

$$\mathbf{q}^T \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{A} \mathbf{B} \mid \dots \mid \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B} \right] = 0$$

per cui \mathbf{R} non ha rango n , e il sistema non è raggiungibile.

Di converso, supponiamo che il sistema non sia raggiungibile; senza perdere in generalità possiamo assumere che \mathbf{A}, \mathbf{B} siano in forma standard di raggiungibilità, e dobbiamo far vedere che, se \mathbf{A}_N ha dimensione $n - r > 0$, allora

esiste un $\bar{\mathbf{q}}$ che soddisfa 22.

Per questo $\bar{\mathbf{q}}$ sarà

$$\bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} = \bar{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} \mathbf{B}_R \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \bar{\mathbf{q}}^T = \left[\mathbf{0} \mid \bar{\mathbf{q}}_R^T \right]$$

e inoltre basterà scegliere

$$\bar{\mathbf{q}}_R^T \mathbf{A}_N = \lambda_i \bar{\mathbf{q}}_R^T$$

Applichiamo il lemma PBH al caso di una coppia (\mathbf{A}, \mathbf{B}) con \mathbf{A} in forma di Jordan, con p miniblocchi:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & & & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & & & \\ \hline & \mathbf{0} & & & \ddots & & \\ \hline & & & & & \mathbf{0} & \\ \hline & & & & & & \lambda_p & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\ & & & & & & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ & & & & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{array} \right]; \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_{11} \\ \mathbf{B}_{12} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{1,m_1} \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{B}_{p,1} \\ \mathbf{B}_{p,2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{p,m_p} \end{array} \right]$$

Risulta che, per essere raggiungibile, le ultime righe \mathbf{B}_{i,m_i} per ogni miniblocco corrispondente ad autovalori coincidenti, devono essere linearmente indipendenti. Infatti la matrice $\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}$ ha tante righe nulle quante sono i miniblocchi associati a λ_i , cioè la molteplicità geometrica μ_i di λ_i , ed il rango di $P(\lambda_i)$ non diminuisce se e solo se le corrispondenti righe estratte da \mathbf{B} hanno rango μ_i .

In particolare, per un sistema SISO, è necessario che la molteplicità geometrica di tutti gli autovalori sia pari a uno, e che \mathbf{B} abbia almeno tanti elementi diversi da zero quanti gli autovalori distinti di \mathbf{A} .

Se in un sistema SISO vi sono più catene di autovalori generalizzati corrispondenti ad uno stesso autovalore, solo i modi di (al più) la più lunga di queste catene potranno apparire nella risposta forzata del sistema. In altri termini, nella f.d.t. il polo corrispondente apparirà con molteplicità pari (al più) alla dimensione del miniblocco di ordine più elevato.

Esempio: Per il sistema

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}^T; \quad \mathbf{D} = 0$$

si ha

$$G(s) = \frac{\mathbf{C} \begin{bmatrix} (\lambda + 1)^2 & (\lambda + 1) & 0 \\ 0 & (\lambda + 1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda + 1)^2 \end{bmatrix} \mathbf{B}}{(\lambda + 1)^3} = \frac{C_1 B_2 + (C_1 B_1 + C_2 B_2 + C_3 B_3)(\lambda + 1)}{(\lambda + 1)^2}$$

Un sistema con μ_i miniblocchi associati ad un unico autovalore λ_i può essere raggiungibile solo se ha almeno μ_i ingressi.

5.9 Forma canonica di controllo

Per n sistema SISO con matrici $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$ nella particolare forma

$$\mathbf{A}_c = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{array} \right]; \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(la forma di \mathbf{A}_c si dice *compagna orizzontale inferiore*), la matrice di raggiungibilità vale

$$\mathbf{R}_c = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \star & \star \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} + a_{n-1}^2 & \star & \star \end{array} \right]$$

(dove \star indica elementi il cui calcolo esplicito è tralasciato), che è invertibile. Il sistema è quindi raggiungibile.

Dato un qualsiasi altro sistema SISO (\mathbf{A}, \mathbf{B}) con matrice di raggiungibilità \mathbf{R} :

se (\mathbf{A}, \mathbf{B}) è algebricamente equivalente a $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$ ($\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{A}_c\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{B} = \mathbf{T}\mathbf{B}_c$), allora è raggiungibile: infatti $\mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{R}_c$ ha rango pieno;

Se (\mathbf{A}, \mathbf{B}) è raggiungibile, \mathbf{R} ha rango pieno, quindi esiste una \mathbf{T} invertibile,

data da $\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{R}_c^{-1}$, che trasforma le coordinate in modo tale da avere $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{A}_c$, $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{B}_c$.

La forma $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$ in cui possono essere messi tutti e soli i sistemi completamente raggiungibili si chiama *canonica di controllo*.

La matrice \mathbf{R}_c^{-1} ha una forma particolare di facile memorizzazione (verificare per esercizio):

$$\mathbf{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il polinomio caratteristico di una matrice $\mathbf{A}_{c,n}$ in forma compagna orizzontale inferiore di dimensione n , si può calcolare ricorsivamente sviluppando il determinante secondo gli elementi della prima colonna:

$$\begin{aligned} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{c,n}) &= \det \left(\left[\begin{array}{c|cccc} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \hline a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & s + a_{n-1} \end{array} \right] \right) = \\ &= (-1)^{n-1} a_0 (-1)^{n-1} + s \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{c,n-1}) = \\ &= a_0 + \det \left(\left[\begin{array}{c|cccc} s & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \hline a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & s + a_{n-1} \end{array} \right] \right) \end{aligned}$$

da cui

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{c,n}) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n = \pi(s)$$

I coefficienti dell'ultima riga della forma compagna orizzontale inferiore sono i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice stessa, ordinati secondo le potenze crescenti di s da sinistra a destra e cambiati di segno.

Si osservi anche esplicitamente che il polinomio caratteristico di una matrice non cambia per trasformazioni di similitudine:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det(s\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}^{-1}) \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \det(\mathbf{T})$$

Sulla base di questa e delle osservazioni precedenti, è facile portare un sistema (\mathbf{A}, \mathbf{B}) (LTI raggiungibile SISO) nella forma canonica di controllo. Si procede infatti come segue:

1. Si calcola il polinomio caratteristico di \mathbf{A} , $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$;
2. Si costruisce la matrice di raggiungibilità \mathbf{R} e se ne verifica il rango;
3. Si costruiscono direttamente $\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c$;
4. Si calcola $\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{R}_c^{-1}$;
5. Si trova $\mathbf{C}_c = \mathbf{C}\mathbf{T}$

Ricordiamo che, quando il sistema fosse dato in termini della sua equazione normale, come spesso avviene derivando un modello fisico da equazioni differenziali o incrementali di ordine superiore, del tipo

$$D^n y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i D^i y(t) + b_0 u(t)$$

il metodo più diretto per riscrivere il sistema nello spazio di stato consiste nel porre $\mathbf{x}_1 = y$, $\mathbf{x}_2 = \dot{y}$, etc., ottenendo così l'equazione di stato nella forma canonica di controllo.

Nel caso più generale in cui appaiano nella forma normale anche le derivate (differenze) di ordine più elevato dell'ingresso, cioè

$$D^n y(t) = \sum_{i=0}^{n-1} -a_i D^i y(t) + \sum_{j=0}^m b_j D^j u(t)$$

si può scrivere ancora il sistema in forma canonica di controllo utilizzando le proprietà dei sistemi lineari di sovrapposizione degli effetti degli ingressi e di risposta alla derivata di un segnale come derivata della risposta.

Infatti, detta $z(t)$ la soluzione della equazione "ausiliaria"

$$\begin{aligned} D^n z(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} -a_i D^i z(t) + u(t), \\ D^i z(0) &= z_0^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

si ha che la soluzione corrispondente a $v(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^j u(t)$ con le stesse condizioni iniziali, è data da

$$y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^j z(t).$$

Per dimostrarlo, basterà far vedere che nel caso $v(t) = Du(t)$, la funzione $y(t) = Dz(t)$ ($y(0) = Dz(0)$) risolve l'equazione

$$\begin{aligned} D^n y(t) &= \sum_{i=0}^{n-1} -a_i D^i y(t) + Du(t), \\ D^{i-1} y(0) &= z_0^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

il resto seguendo per reiterazione e dal principio di sovrapposizione degli effetti. Che questo sia vero lo si osserva facilmente sostituendo $y = Dz$ nella equazione, integrandone entrambe i membri tra 0 e t , ed eliminando le condizioni iniziali.

Si può quindi ottenere una forma di stato (canonica di controllo) che nel caso di sistemi strettamente propri ($m < n$) vale

$$D\mathbf{z} = \left[\begin{array}{c|cccccccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_m & -a_{m+1} & \cdots & -a_{n-1} \end{array} \right] \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z} \stackrel{def}{=} \mathbf{C}_c \mathbf{z}$$

La forma canonica di controllo appare pertanto fisicamente motivata come una forma di stato con n stati in cui viene naturalmente scritta una equazione differenziale (o alle differenze) di ordine n .

Nel caso di sistemi propri non strettamente, la forma della matrice delle uscite diviene la seguente:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 & b_1 - b_n a_1 & b_2 - b_n a_2 & \cdots & b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + [b_n] u$$

Dato un sistema LTI SISO in forma normale, è dunque sempre possibile scrivere un sistema in forma di stato con matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ ad esso equivalente con (\mathbf{A}, \mathbf{B}) in forma canonica di controllo (quindi raggiungibile). “Equivalente” si intende nel senso che, dato un ingresso e delle condizioni iniziali per il primo, esistono degli stati iniziali tali per cui l’uscita del secondo sistema corrispondente allo stesso ingresso è la stessa.

Esempio: Data l’equazione $\ddot{y} + y = 2u + \dot{u}$, un sistema in forma di stato che la realizza (in forma canonica di controllo) è

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0. \end{aligned}$$

Lo stesso rapporto ingresso-uscita è realizzato anche ad esempio ponendo $\mathbf{x}_1 = y$, $\mathbf{x}_2 = \dot{y}$ e $\mathbf{x}_3 = y + \dot{y}$, quindi dal sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{A}' &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{B}' &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C}' &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{D}' &= 0 \end{aligned}$$

In questo secondo caso però la coppia $(\mathbf{A}', \mathbf{B}')$ non è raggiungibile.

Le funzioni di trasferimento per i due sistemi sono naturalmente le stesse (avendo rapporto solo col rapporto ingresso/uscita, quindi con la equazione in forma normale): nel secondo caso, si osserva una cancellazione polo/zero.

La funzione di trasferimento per un sistema SISO strettamente proprio in forma canonica di controllo vale $G(s) = \mathbf{C}_c(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c$. Ricordando che

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0$$

e che

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_c \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}_c &= \\ &= \begin{bmatrix} b_0 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \star & \dots & \star & | & 1 \\ \star & \dots & \star & | & s \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ \star & \dots & \star & | & s^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

si ha

$$G(s) = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

In altre parole, nella forma canonica di controllo si trovano i coefficienti del polinomio caratteristico nell'ultima riga della matrice dinamica \mathbf{A}_c , e i coefficienti del polinomio degli zeri nella matrice delle uscite \mathbf{C}_c .

5.10 Retroazione degli stati

Nella grande maggioranza delle applicazioni, il controllo basato esclusivamente sulla esatta conoscenza dello stato iniziale e del modello del sistema (come lo si è visto nel caso della pianificazione) non dà risultati soddisfacenti, in seguito alla presenza di disturbi (che possono alterare lo stato del sistema) e di errori di modello.

Lo strumento principale dell'ingegnere del controllo è la retroazione, cioè l'utilizzo di informazioni provenienti da opportuni sensori sullo stato attuale

effettivo del sistema. Tipicamente, come già si è visto nell'introduzione, si dovrà pensare di avere a disposizione solo la conoscenza dei valori di un certo numero di *uscite misurabili*, cioè di note funzioni degli stati incogniti. Per il momento, comunque, supporremo di avere a disposizione la misura di tutti gli stati.

Il concetto di *retroazione degli stati sugli ingressi* per un sistema $D\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ consiste nel realizzare ingressi calcolati istante per istante in funzione dello stato presente: $\mathbf{u}(t) = \alpha(\mathbf{x}(t)) + \beta(\mathbf{x}(t))\mathbf{v}(t)$. Come già accennato trattando della stabilità, la retroazione è spesso usata al fine di rendere stabile un sistema che originalmente non lo è, ovvero di migliorarne le caratteristiche di stabilità (ad esempio, migliorando la velocità di convergenza).

Nel caso di sistemi lineari tempo invarianti, se si desidera che il sistema mantenga le sue caratteristiche, anche la retroazione sarà di tipo lineare e tempo invariante, cioè si ha

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{H}\mathbf{v}$$

con $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

La matrice \mathbf{H} si assume invertibile (nel caso opposto, alcuni ingressi sarebbero di fatto disconnessi dal sistema), e di conseguenza

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{x} + \mathbf{BH}\mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= (\mathbf{C} + \mathbf{DK})\mathbf{x} + \mathbf{DH}\mathbf{v} \end{aligned}$$

La retroazione cambia il sistema in modo assai importante, ad esempio alterando la posizione degli autovalori. Comunque, la raggiungibilità del sistema non è modificata. Infatti dopo la retroazione si ha

$$\mathbf{R}_f = \left[\mathbf{BH} \mid (\mathbf{A} + \mathbf{BK})\mathbf{BH} \mid \cdots \mid (\mathbf{A} + \mathbf{BK})^{n-1}\mathbf{BH} \right]$$

dalla quale si può osservare che

$$\mathbf{R}_f = \left[\mathbf{B} \mid \mathbf{AB} \mid \mathbf{A}^2\mathbf{B} \mid \cdots \right] \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{KBH} & \mathbf{KABH} + \mathbf{KBKBH} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} & \mathbf{KBH} & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

ed essendo \mathbf{H} invertibile, si ha $\text{Im}(\mathbf{R}_f) = \text{Im}(\mathbf{R})$.

Gli autovalori esterni al sottospazio di raggiungibilità non vengono alterati dalla retroazione. Infatti, ponendo il sistema in forma standard di raggiungibilità, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{BK} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_R & \mathbf{A}_{RN} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_N \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_R \\ \mathbf{0} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_R & \mathbf{K}_N \end{array} \right] = \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_R + \mathbf{B}_R \mathbf{K}_R & \mathbf{A}_{RN} + \mathbf{B}_R \mathbf{K}_N \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_N \end{array} \right] \end{aligned}$$

Considerando invece le modifiche imposte agli autovalori del sottosistema raggiungibile dalla retroazione, è particolarmente utile considerare il caso SISO in cui le coordinate scelte siano quelle corrispondenti ad una forma canonica di controllo per il sistema (caso che abbiamo visto generale per sistemi raggiungibili).

La matrice di retroazione in questo caso ha dimensione $1 \times n$, $\mathbf{K} = [k_0 \ k_1 \ \cdots \ k_{n-1}]$, e la matrice dinamica retroazionata viene scritta

$$\mathbf{A} + \mathbf{BK} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -a_0 + k_0 & -a_1 + k_1 & -a_2 + k_2 & \cdots & -a_{n-1} + k_{n-1} \end{array} \right]$$

Il polinomio caratteristico della matrice diviene pertanto

$$\begin{aligned} \pi(s) &= (-a_0 + k_0) + (-a_1 + k_1)s + (-a_2 + k_2)s^2 + \\ &+ \cdots + (-a_{n-1} + k_{n-1})s^{n-1} + s^n. \end{aligned}$$

È evidente come, scegliendo opportunamente i coefficienti che appaiono in K , si possa fare in modo che gli autovalori risultino in posizioni arbitrariamente scelte nel piano complesso (purchè reali o complesse coniugate).

Trovata la retroazione \mathbf{K}_c che alloca i poli nelle posizioni desiderate per le coordinate della forma canonica, si può facilmente scrivere la retroazione direttamente nelle coordinate originali (nelle quali per esempio potrebbero essere date le misure degli stati) ponendo $\mathbf{K} = \mathbf{K}_c \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{K}_c \mathbf{R}_c \mathbf{R}^{-1}$.

Esempio. Sia data

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0]; \quad \mathbf{D} = 0;$$

Il sistema è raggiungibile:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

ed ha polinomio caratteristico $(s^3 - 2s^2 + s - 2)$, quindi autovalori in 2 e in $\pm j$. Le matrici $\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c$ in forma canonica di controllo sono quindi

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Essendo poi

$$\mathbf{R}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

si ha $\mathbf{C}_c = \mathbf{C}\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Se si desidera porre gli autovalori ad esempio in $-3, -2 \pm j$, si calcola il nuovo polinomio caratteristico $s^3 + \sum_{i=0}^2 c_i s^i = s^3 + 7s^2 + 17s + 15$, e si risolvono in k_i le equazioni $-a_i + k_i = c_i$, ottenendo $k_0 = -17, k_1 = -16, k_2 = -9$. La legge di controllo, espressa nelle originali coordinate, è dunque data da

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{K}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \end{bmatrix}^T + \mathbf{v}$$

La f.d.t. di un sistema (\mathbf{A}, \mathbf{B}) retroazionato con una matrice \mathbf{K} dipende solo dal suo sottosistema raggiungibile, e poichè questo può essere messo in forma canonica di controllabilità, si ha

$$G_c(p) = \mathbf{C}_c(p\mathbf{I} - \mathbf{A}_c - \mathbf{B}_c\mathbf{K}_c)^{-1}\mathbf{B}_c$$

da cui si osserva che, restando \mathbf{C}_c invariato, il polinomio degli zeri della f.d.t. non cambia per retroazione (eccettuato il caso in cui la retroazione porti un polo a cancellare uno degli zeri).

Per un sistema SISO, la allocazione degli autovalori consiste nella soluzione di n equazioni lineari (una per ogni autovalore) in n incognite, le componenti della matrice $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

Cosa avviene per un sistema MIMO? Se il sistema ha m ingressi, vi sono mn incognite per n equazioni. Se tra le colonne di \mathbf{B} ne esiste una, diciamo \mathbf{B}_1 , tale che

$$\text{rank} \left[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{B}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}_1 \right] = n$$

, per allocare i poli basterà scegliere opportunamente gli elementi $\mathbf{K}_{1,1}, \dots, \mathbf{K}_{n,1}$ e porre tutti gli altri a 0 in \mathbf{K} per ottenere lo scopo.

Se, nonostante il sistema sia raggiungibile, non esiste nessuna colonna di \mathbf{B} che da sola può garantire la raggiungibilità, rimane possibile retroazionare gli stati in modo da allocare gli autovalori arbitrariamente mediante il *Lemma di Heymann*. Questo consiste nell'applicare preventivamente al sistema una retroazione $\mathbf{u} = \mathbf{K}_{Hi} \mathbf{x} + \mathbf{v}$ tale che $(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{Hi}, \mathbf{B}_i)$ sia controllabile, per poi allocare gli autovalori di $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_{Hi}$ con una ulteriore retroazione $\mathbf{v} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{w}$.

Il lemma di Heymann afferma che una tale matrice esiste, purchè il sistema sia raggiungibile e \mathbf{B}_i sia non nulla, e fornisce la seguente formula per il calcolo della matrice \mathbf{K}_{Hi} (data nel caso $i = 1$ senza perdere generalità).

Si costruisca la successione di vettori $\mathbf{B}_1, \mathbf{A}\mathbf{B}_1, \mathbf{A}^2\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}^{\nu_1-1}\mathbf{B}_1$, arrendendosi al passo in cui si trova $\mathbf{A}^{\nu_1}\mathbf{B}_1$ linearmente dipendente dai precedenti. Si procede in modo analogo con \mathbf{B}_2 , calcolando $\mathbf{B}_2, \mathbf{A}\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{A}^{\nu_2-1}\mathbf{B}_2$, arrendendosi al passo in cui si trova $\mathbf{A}^{\nu_2}\mathbf{B}_2$ linearmente dipendente da $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}^{\nu_1-1}\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{A}^{\nu_2-1}\mathbf{B}_2$.

Se necessario, si procede con \mathbf{B}_3 etc. sinché si ottiene una matrice invertibile

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \\ &= \left[\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{B}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\nu_1-1}\mathbf{B}_1 \mid \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{A}\mathbf{B}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\nu_2-1}\mathbf{B}_2 \mid \cdots \right. \\ &\quad \left. \cdots \mid \mathbf{B}_{p-1} \quad \mathbf{A}\mathbf{B}_{p-1} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\nu_{p-1}-1}\mathbf{B}_{p-1} \mid \mathbf{B}_p \quad \mathbf{A}\mathbf{B}_p \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{\nu_p-1}\mathbf{B}_p \right] \end{aligned}$$

Si costruisce inoltre la matrice $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$\mathbf{S} = \left[0 \quad \cdots \quad 0 \quad \mathbf{e}_2 \mid 0 \quad \cdots \quad 0 \quad \mathbf{e}_3 \mid \cdots \mid 0 \quad \cdots \quad 0 \quad \mathbf{e}_p \mid 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \right]$$

dove \mathbf{e}_i è l' i -esima colonna della matrice identità. La matrice di Heymann è $\mathbf{K}_{H1} = \mathbf{S}\mathbf{Q}^{-1}$ (la dimostrazione è omessa).

Naturalmente, la scelta fatta per la allocazione degli autovalori del sistema MIMO è solo una delle possibili soluzioni, che sono una infinità di dimensione $(m-1)n$. La libertà di scelta garantita dai sistemi MIMO può

venir sfruttata per raggiungere altri scopi, oltre che la allocazione degli autovalori (ad esempio, alcuni degli autovettori) Questo argomento è oggetto di studio in corsi più avanzati.

5.11 Richiami di Algebra Lineare

Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

1. Il sistema ha soluzione se e solo se $\mathbf{b} \in \text{Im } \mathbf{A}$;
2. Il sistema ha soluzione $\forall \mathbf{b}$ se e solo se $\text{Im } \mathbf{A} = \mathbb{R}^n$, quindi se $\text{rank } \mathbf{A} = n$ (si dice che \mathbf{A} ha pieno rango righe). E' necessario perciò che $m \geq n$;
3. Il sistema ha al più un'unica soluzione se $\ker \mathbf{A} = \{0\}$;

Per $n = m$, si ha ovviamente una soluzione per ogni \mathbf{b} , che è anche unica, se e solo se \mathbf{A} è invertibile: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$.

Consideriamo il caso 2, in cui la soluzione di $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ esiste ma non è unica. Poniamoci il problema di trovare, tra le soluzioni, quella di lunghezza minima. Vogliamo in altri termini risolvere il problema di minimo vincolato

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

Questo problema è risolto facilmente col metodo dei moltiplicatori di Lagrange, definendo $L = \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \lambda^T (\mathbf{Ax} - \mathbf{b})$ e imponendo $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$. Dalla prima condizione si ha

$$\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{A}^T \lambda}{2},$$

quindi

$$-\mathbf{AA}^T \lambda = 2\mathbf{b}$$

Dalla ipotesi che \mathbf{A} abbia pieno rango righe, segue che \mathbf{AA}^T è invertibile: infatti, questa matrice è quadrata, ed essendo le righe di \mathbf{A} indipendenti, tali sono anche le colonne di \mathbf{A}^T , che quindi non ha spazio nullo (cioè, non esiste alcun \mathbf{y} tale che $\mathbf{A}^T \mathbf{y} = 0$). Inoltre, poichè sappiamo dal teorema fondamentale dell'algebra che $\text{Im}(\mathbf{A}^T) = \ker^\perp(\mathbf{A})$, nessun vettore nell'immagine di \mathbf{A}^T può appartenere al kernel di \mathbf{A} . Quindi si ha che la soluzione di minima lunghezza è

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T (\mathbf{AA}^T)^{-1} \mathbf{b}$$

Si osservi che la matrice $\mathbf{A}^R \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}^T (\mathbf{AA}^T)^{-1}$ è una *inversa destra* di \mathbf{A} : $\mathbf{AA}^R = \mathbf{I}_n$.

Se la lunghezza del vettore \mathbf{x} fosse stata misurata in un'altra metrica, $\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{W} \mathbf{x}$ (con \mathbf{W} simmetrica e positiva definita), la soluzione sarebbe

risultata $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^T\mathbf{b}$. La matrice $\mathbf{A}_W^R \stackrel{def}{=} \mathbf{W}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{A})^T$ è anch'essa una inversa destra, *pesata* in \mathbf{W} (quindi, le inverse destre non sono uniche).

È interessante anche osservare come una metrica considerata su uno spazio si trasformi cambiando le coordinate. Siano $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ le nuove coordinate. Si ha: $\mathbf{x}^T\mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{z}^T\mathbf{T}^T\mathbf{W}\mathbf{T}\mathbf{z}$. La matrice della metrica si trasforma quindi per congruenza. Essendo \mathbf{W} simmetrica e positiva definita (non avrebbe senso altrimenti), esiste sempre un sistema di coordinate nel quale la matrice della metrica è diagonale: basterà prendere per \mathbf{T} la matrice ortogonale diagonalizzante \mathbf{Q} ($\mathbf{Q}^T\mathbf{W}\mathbf{Q} = \Lambda$). Scegliendo poi $\mathbf{T} = \mathbf{Q}\Lambda^{-1/2}$, si ha $\mathbf{x}^T\mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{z}^T\mathbf{z}$, cioè la matrice metrica è identica.

Si consideri adesso invece il caso (3) in cui una soluzione (in generale) non esista, ma che $\dim \ker(\mathbf{A}) = 0$. Ha senso in questo caso cercare la miglior approssimazione, cioè la \mathbf{x} che minimizza la norma del residuo

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \min \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2$$

Ponendo

$$\frac{\partial(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})^T(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b})}{\partial\mathbf{x}} = 2(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}^T\mathbf{b})^T = 0$$

si ha la soluzione ai minimi quadrati

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{b}.$$

L'invertibilità è garantita dall'ipotesi che \mathbf{A} non abbia spazio nullo.

La matrice $\mathbf{A}^L = (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T$ è una inversa sinistra: $\mathbf{A}^L\mathbf{A} = \mathbf{I}_m$. Se si considera una metrica \mathbf{W}_b sullo spazio dei residui, si ottiene $\mathbf{A}_{W_b}^L = (\mathbf{A}^T\mathbf{W}_b\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{W}_b$.

Chiaramente, inverse destre e sinistre sono diverse in generale (anche nelle dimensioni). Se una inversa destra e una sinistra coincidono, allora questa è l'unica inversa \mathbf{A}^{-1} di una matrice quadrata \mathbf{A} .

Ci chiediamo ora se esiste una espressione unica per una "inversa" di una matrice \mathbf{A} (chiamiamola \mathbf{A}^+) che fornisca, nei diversi casi, le soluzioni viste. Cioè, $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$ se esiste l'inversa; $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^R$ se esiste l'inversa destra sopra definita (cioè se \mathbf{A} ha pieno rango righe); $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^L$ se esiste l'inversa sinistra sopra definita (cioè se \mathbf{A} ha pieno rango colonne).

Desideriamo anche considerare i casi dove non esista né inversa destra né sinistra, cioè dove il sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ non abbia alcuna soluzione in generale, ma per i particolari \mathbf{b} per cui ha soluzione, questa non è unica. In questo caso, vorremmo che $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ fornisca, tra le soluzioni che approssimano la soluzione con minima norma del residuo, quella che possiede norma minima.

Consideriamo dunque una matrice \mathbf{A} $n \times m$, e $\text{rank}(\mathbf{A}) = r \leq m$. Consideriamo la diagonalizzazione delle matrici simmetriche e semi-definite positive ottenute per prodotto con la trasposta:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{A}^T &= \mathbf{U}\mathbf{M}\mathbf{U}^T \\ \mathbf{A}^T\mathbf{A} &= \mathbf{V}\mathbf{N}\mathbf{V}^T\end{aligned}$$

dove \mathbf{U} è $n \times n$, composta da n autovettori ortonormali di $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ ordinati in modo che in \mathbf{M} si trovino gli autovalori di $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ decrescenti in modulo lungo la diagonale; e \mathbf{V} è $m \times m$, composta da m autovettori ortonormali di $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ordinati in modo che in \mathbf{N} si trovino gli autovalori di $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ decrescenti in modulo lungo la diagonale.

Naturalmente, si ha che le ultime $n - r$ colonne di \mathbf{U} , e le ultime $m - r$ colonne di \mathbf{V} , sono contenute rispettivamente nel $\ker(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \ker \mathbf{A}^T$ e nel $\ker(\mathbf{A}^T\mathbf{A}) = \ker \mathbf{A}$, e formano una base ortogonale di questi sottospazi. Infatti, gli elementi sulla diagonale di \mathbf{M} e \mathbf{N} sulle righe e colonne di indice superiore a r sono nulli.

Si osservi che i primi r valori diagonali (non nulli) di \mathbf{M} e di \mathbf{N} sono eguali e positivi: $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, r$. Entrambe le matrici hanno poi $\min(n, m) - r$ autovalori nulli sulla diagonale. Infine, se $n > m$, la matrice \mathbf{N} ha $n - m$ altri autovalori nulli sulla diagonale; se $n < m$, è la matrice \mathbf{M} ad avere $m - n$ altri autovalori nulli sulla diagonale.

Questa è una conseguenza del fatto che gli autovalori di un prodotto quadrato di matrici rettangolari, ad esempio \mathbf{BC} , coincidono con quelli del prodotto commutato, \mathbf{CB} , eccetto che per un numero di autovalori nulli pari alla differenza di dimensioni tra le due matrici quadrate.

Possiamo quindi scrivere $\mathbf{M} = \Sigma\Sigma^T$ e $\mathbf{N} = \Sigma^T\Sigma$, con Σ $n \times m$, e

$$\begin{aligned}\Sigma_{ii} &= \sqrt{\lambda_i} \stackrel{def}{=} \sigma_i, & i = 1, \dots, r \\ \Sigma_{jk} &= 0, & \text{altrimenti}\end{aligned}$$

Gli r numeri positivi σ_i sono detti *valori singolari* di \mathbf{A} .

Le matrici \mathbf{U} e \mathbf{V} sinora considerate rappresentano basi ortonormali arbitrariamente scelte (eccetto per il fatto che le ultime colonne sono una base di $\ker \mathbf{A}^T$ e $\ker \mathbf{A}$, e le prime colonne sono una base di $\text{Im } \mathbf{A}$ e $\text{Im } \mathbf{A}^T$, rispettivamente). Possiamo quindi scegliere una base, o meglio una relazione tra le basi dei quattro sottospazi, particolarmente utile. Faremo ora vedere che è possibile fare questo in modo che si possa scrivere

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$$

cioè in modo da ottenere quella che viene chiamata *Decomposizione ai Valori Singolari* (S.V.D.) di \mathbf{A} .

Per far questo, fissiamo ad esempio arbitrariamente una base ortonormale di $\text{Im } \mathbf{A}^T$ nelle prime r colonne di \mathbf{V} , e cerchiamo le corrispondenti colonne di \mathbf{U} risolvendo $\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{U}\Sigma$, ovvero

$$\mathbf{U}(:, i) = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{A}\mathbf{V}(:, i), \quad i = 1, \dots, r$$

È facile verificare che queste soluzioni sono effettivamente colonne ortonormali ($\mathbf{U}(:, i)^T \mathbf{U}(:, j) = \delta_{ij}$) e che formano una base di $\text{Im } \mathbf{A}$: sono quindi legittime scelte per le prime r colonne di \mathbf{U} . Per le altre colonne di \mathbf{U} e \mathbf{V} , basterà prendere i complementi ortonormali (usando ad esempio Gram-Schmidt).

Per costruire la SVD di una matrice \mathbf{A} $n \times m$ (qualunque!) basta dunque:

1. Costruire $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ e trovarne gli r autovalori non nulli λ_i . Porre $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ e costruire Σ $n \times m$ con σ_i sulla diagonale;
2. Costruire una matrice ortonormale $m \times m$ \mathbf{V} le cui prime r colonne siano una base di $\text{Im } \mathbf{A}^T$;
3. Porre $\mathbf{U}(:, i) = \frac{1}{\sigma_i} \mathbf{A}\mathbf{V}(:, i)$ per le prime r colonne di \mathbf{U} ;
4. Estendere queste r colonne di \mathbf{U} ad una base ortonormale di \mathbb{R}^n .
5. Scrivere $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}$.

Si noti che quanto sopra si applica sia al caso $n \geq m$ che $m \geq n$. Nel secondo caso però, è più conveniente trovare gli autovalori di $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, in numero di n , e quindi applicare la procedura alla matrice \mathbf{A}^T . La procedura non è d'altronde numericamente efficiente né stabile: per algoritmi migliori, si vedano testi di analisi numerica.

Mediante la SVD, il problema di ottenere la soluzione di un sistema lineare $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ qualunque, nel senso di trovare la miglior approssimazione di minima norma, ha soluzione immediata. Riscriviamo infatti $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}$, e cambiamo le coordinate in entrambe gli spazi dominio e codominio ponendo $\mathbf{x} = \mathbf{V}\bar{\mathbf{x}}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{U}\bar{\mathbf{b}}$. Si ha, nelle nuove coordinate $\Sigma\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}}$, cioè

$$\begin{aligned} \sigma_1 \bar{x}_1 &= \bar{b}_1 \\ \vdots &= \vdots \\ \sigma_r \bar{x}_r &= \bar{b}_r \\ 0 \bar{x}_{r+1} &= \bar{b}_{r+1} \\ \vdots &= \vdots \\ 0 \bar{x}_n &= \bar{b}_n \end{aligned}$$

La soluzione che minimizza la somma dei quadrati dei residui è dunque $\mathbf{x}_1 = \frac{\bar{\mathbf{b}}_1}{\sigma_1}, \dots, \mathbf{x}_r = \frac{\bar{\mathbf{b}}_r}{\sigma_r}$, con le altre componenti di $\bar{\mathbf{x}}$ che non influenzano il residuo e che quindi sono arbitrarie. Ovviamente, d'altronde, per minimizzare $\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}^T \mathbf{V}^T \mathbf{V} \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{x}}$, tali componenti si dovranno scegliere nulle. Tornando alle vecchie coordinate, si trova così la soluzione desiderata.

La matrice \mathbf{A}^+ che risolve il problema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nel senso suddetto è dunque

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V}\Sigma^+\mathbf{U}^T$$

dove Σ^+ è una matrice $m \times n$ che ha sulla diagonale gli inversi dei valori singolari di \mathbf{A} , e zeri altrove.

5.12 Altre applicazioni della SVD

Compressione di dati. Si consideri per esempio una immagine di dimensione $N \times N$, con N grande, e si desideri isolare (per limiti di risorse) i dati di maggior rilievo contenuti nella matrice. Scrivendo la SVD della matrice dei dati,

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T = \mathbf{U}(:,1)\sigma_1\mathbf{V}(:,1)^T + \mathbf{U}(:,2)\sigma_2\mathbf{V}(:,2)^T + \dots$$

ogni termine della sommatoria contiene solo $2N$ dati. Troncando la sommatoria quando i valori singolari (ordinati in senso decrescente) diminuiscono al di sotto di un certo valore ϵ , si ottengono approssimazioni dell'immagine di crescente risoluzione per $\epsilon \rightarrow 0$.

Il massimo valor singolare di una matrice è pari alla sua norma due, cioè alla massima "amplificazione" prodotta da \mathbf{A} su un vettore \mathbf{x} :

$$\max_{\mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \max_{\mathbf{x}} \frac{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}}{\sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}} = \sigma_1$$

Questa coincide col massimo autovalore solo se \mathbf{A} è simmetrica.

Una misura di quanto una matrice sia "vicina" alla singolarità è il minimo valore singolare (e NON il minimo autovalore, in generale): si consideri ad esempio $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/\epsilon \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, in cui gli autovalori sono sempre 1, ma i valori singolari sono invece dell'ordine di ϵ e $1/\epsilon$ per ϵ piccoli (la matrice tende chiaramente alla singolarità per $\epsilon \rightarrow 0$).

6 Osservabilità e Ricostruibilità

Si è in passato già sottolineato il fatto che, nel modello in forma di stato di un sistema, l'uscita (di misura) ha il significato di specificare quelle grandezze di cui, a differenza dello stato, si ha a disposizione una misura ad ogni istante del processo. Essendo la conoscenza degli stati necessaria per effettuare la loro retroazione, è perciò fondamentale determinare se, dalla conoscenza delle uscite (e degli ingressi, che sono ovviamente a nostra disposizione), è possibile conoscere (o più in generale stimare) lo stato attuale del sistema.

La capacità di stimare lo stato di un sistema è d'altronde importante anche in senso diretto in molte applicazioni, dove è importante risalire dalla osservazione di fenomeni misurabili alla situazione "interna" del sistema, di per sé non accessibile.

Se i dati di ingresso/uscita sono misurati in un intervallo $[0, t]$, il problema di ricavare informazione sullo stato $\mathbf{x}(0)$ al tempo 0 si dice di *osservazione dello stato*; viceversa, il problema di ricavare lo stato $\mathbf{x}(t)$ al tempo t si dice di *ricostruzione dello stato*. Si vedrà che i due problemi sono equivalenti per sistemi LTITC, ma non per sistemi LTITD.

Nelle questioni di osservazione/ricostruzione, ci troveremo spesso di fronte a problemi che possono essere ricondotti a sistemi di equazioni lineari sovradeterminati (con meno incognite che equazioni), che in pratica saranno spesso inconsistenti. Per questi problemi si porranno quindi questioni di approssimazione ottima ad una soluzione impossibile.

Consideriamo un sistema tempo invariante in forma di stato

$$\begin{aligned} D\mathbf{x}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{aligned}$$

con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$. Sia al solito $\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\cdot), t)$ il valore della soluzione corrispondente a $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$ e controllo $\mathbf{u}(\tau)$, $\tau \in [0, t]$, al tempo t ; si indichi poi con $\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\cdot), t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\cdot), t), \mathbf{u}(t))$.

Ci chiediamo se, conoscendo

- il modello del sistema
- l'ingresso $\mathbf{u}(\cdot)$ sull'intervallo $[0, t]$;
- l'uscita $\mathbf{y}(\cdot)$ sull'intervallo $[0, t]$,

è possibile osservare $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$ (ricostruire $\mathbf{x}(t)$).

È ovvio (almeno in linea teorica) che, se è possibile osservare $\bar{\mathbf{x}}$, la conoscenza dell'ingresso, del modello e quindi della sua soluzione (che si suppone unica nel futuro per il determinismo del modello) implica che si possa determinare

univocamente $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t)$. Il viceversa non è detto: per i sistemi TD, in particolare, abbiamo già visto che le traiettorie di un sistema non sono univocamente determinate nel passato (si pensi alla possibile non invertibilità di \mathbf{A}^t per sistemi LTITD).

Poniamo la questione della osservabilità dello stato in termini diversi. Due stati iniziali $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{x}}_1$ si dicono *indistinguibili* (nel futuro) nell'intervallo $[0, t]$ (si scrive $\bar{\mathbf{x}}I_t\bar{\mathbf{x}}_1$) se, qualsiasi ingresso $\mathbf{u}(\cdot) \in U$ venga applicato al sistema, le uscite corrispondenti alle evoluzioni relative sono uguali, cioè

$$\bar{\mathbf{x}}I_t\bar{\mathbf{x}}_1 \Leftrightarrow \forall \mathbf{u} \in U, \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \tau) = \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, \tau) \forall \tau \in [0, t]$$

Gli stati sono detti *indistinguibili tout-court* se sono indistinguibili per ogni t (si scrive $\bar{\mathbf{x}}I\bar{\mathbf{x}}_1$).

Si definisce insieme dei punti *indistinguibili* nell'intervallo $[0, t]$ da $\bar{\mathbf{x}}$ l'insieme

$$\mathcal{I}_t(\bar{\mathbf{x}}) \stackrel{def}{=} \{\bar{\mathbf{x}}_1 \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \tau) = \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, \tau) \forall \tau \in [0, t], \forall \mathbf{u} \in U\}.$$

Ovviamente, se questo insieme contiene altri punti diversi da $\bar{\mathbf{x}}$ stesso, non sarà possibile determinare univocamente lo stato dalle uscite.

6.1 Insieme indistinguibile per un sistema LTITC

Consideriamo l'insieme di indistinguibilità per il sistema

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (23)$$

con $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$, e la corrispondente soluzione per le uscite:

$$\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \tau) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\bar{\mathbf{x}} + \int_0^\tau \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(\tau-\sigma)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\sigma)d\sigma + \mathbf{D}\mathbf{u}(\tau)$$

Confrontando le uscite per due stati iniziali diversi, si ha

$$\bar{\mathbf{x}}_1I_t\bar{\mathbf{x}} \Leftrightarrow \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\bar{\mathbf{x}}, \forall \tau \in [0, t] \Leftrightarrow \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}(\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}) = 0, \forall \tau \in [0, t]$$

per cui lo studio della indistinguibilità di $\bar{\mathbf{x}}_1$ da $\bar{\mathbf{x}}$ può essere riformulato come lo studio della indistinguibilità dello stato $\tilde{\mathbf{x}} \stackrel{def}{=} \bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}$ dall'origine. Inoltre è evidente che in questo problema, gli ingressi non giocano alcun ruolo (questo è vero solo perchè il sistema è lineare!)

Uno stato $\tilde{\mathbf{x}}$ indistinguibile dall'origine nell'intervallo $[0, t]$ viene detto *non osservabile* in $[0, t]$. Non si specifica l'intervallo se questo vale per ogni

intervallo. Se per un sistema l'insieme dei punti non osservabili contiene solo l'origine, si dice che *il sistema* è (completamente) osservabile.

Dunque, la distinguibilità di uno stato $\bar{\mathbf{x}}_1$ da $\bar{\mathbf{x}}$ su $[0, t]$ dipende dalla eguaglianza dei due corrispondenti vettori di uscita per ogni istante dell'intervallo. Supponiamo ancora una volta che gli ingressi applicati al sistema (e quindi anche le sue soluzioni) siano analitici. L'uguaglianza di due funzioni analitiche in ogni punto di un intervallo implica ed è implicata dalla uguaglianza delle funzioni e di tutte le loro derivate nel punto iniziale dell'intervallo. Considerando quindi ancora l'espressione della k -esima derivata dello stato

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{A}^k \mathbf{x} + \sum_{i=1}^k \mathbf{A}^{k-i} \mathbf{B} \mathbf{u}^{(i-1)}$$

, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, 0) - \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, 0) &= \mathbf{C}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_1) \\ \dot{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, 0) - \dot{\mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, 0) &= \mathbf{C}\mathbf{A}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_1) \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, 0) - \mathbf{y}^{(k)}(\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, 0) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^k(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_1) \end{aligned}$$

Queste equazioni, che definiscono gli stati $\bar{\mathbf{x}}_1$ indistinguibili da $\bar{\mathbf{x}}$, possono essere riscritte in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}(0) \\ \tilde{\mathbf{y}}^{(1)}(0) \\ \tilde{\mathbf{y}}^{(2)}(0) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{y}}^{(k)}(0) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^k \\ \vdots \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}$$

dove $\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, t) - \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, t)$.

Dunque $\tilde{\mathbf{x}}$ è non osservabile (ovvero $\bar{\mathbf{x}}_1$ è indistinguibile da $\bar{\mathbf{x}}$) se appartiene allo spazio nullo della matrice composta con infinite righe sopra riportata. In seguito al teorema di Cayley–Hamilton, sappiamo comunque che ogni gruppo di righe $\mathbf{C}\mathbf{A}^r$ con $r \geq n$ è combinazione lineare delle prime n righe della matrice stessa. Possiamo dunque dire che l'insieme dei punti non osservabili nell'intervallo $[0, t]$ è in effetti un sottospazio, detto *sottospazio di inosservabilità*, dato da

$$\bar{\mathcal{O}} = \ker(\mathbf{O}) \stackrel{def}{=} \ker \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \right)$$

La matrice \mathbf{O} viene detta *matrice di osservabilità* del sistema.

Il sottospazio di inosservabilità nell'intervallo $[0, t]$ non dipende in effetti dalla durata dell'intervallo di osservazione t : se uno stato è indistinguibile dall'origine in un tempo t , tale rimarrà per ogni durata della osservazione. Viceversa, se uno stato è osservabile con osservazioni della uscita di una certa durata, lo sarà anche con osservazioni di durata arbitrariamente breve. Quindi, per sistemi in TC, si ometterà di specificare la durata del tempo di osservazione. Un sistema è completamente osservabile se e solo se $\ker(\mathbf{O}) = \{0\}$.

L'insieme dei punti indistinguibili dal generico punto $\bar{\mathbf{x}}$ è dunque dato da

$$\mathcal{I}_t(\bar{\mathbf{x}}) = \{ \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{r}, \forall \mathbf{r} \in \bar{\mathcal{O}} \}$$

ed è quindi un iperpiano, parallelo al sottospazio di inosservabilità, passante per $\bar{\mathbf{x}}$ ed anch'esso indipendente da t . Nessun punto, eccetto $\bar{\mathbf{x}}$, è indistinguibile da $\bar{\mathbf{x}}$ nel caso che il sistema sia osservabile.

6.2 Insieme inosservabile per un sistema LTITD

Consideriamo l'insieme di inosservabilità per il sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t), \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t) \end{aligned} \quad (24)$$

con $\mathbf{x}(0) = \bar{\mathbf{x}}$

La soluzione per le uscite della equazione alle differenze 24 (che indicheremo con $\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \tau)$) è data da

$$\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \tau) = \mathbf{CA}^\tau \bar{\mathbf{x}} + \sum_{k=0}^{\tau-1} \mathbf{CA}^{\tau-k-1} \mathbf{Bu}(k)$$

Consideriamo la differenza tra le uscite corrispondenti a due diversi stati iniziali $\bar{\mathbf{x}}$ e $\bar{\mathbf{x}}_1$, indicandola con

$$\tilde{\mathbf{y}}(\tau) \stackrel{def}{=} \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \tau) - \mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, \tau)$$

. Impilando in un solo vettore i vettori di differenze tra le uscite negli istanti $0, 1, \dots, t$ si può scrivere

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}(0) \\ \tilde{\mathbf{y}}(1) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^t \end{bmatrix} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_1) \stackrel{def}{=} \mathbf{O}_t \tilde{\mathbf{x}}$$

Due stati iniziali sono quindi indistinguibili in t passi se la loro differenza $\tilde{\mathbf{x}}$ appartiene allo spazio nullo della *matrice di osservabilità in t passi* \mathbf{O}_t , che viene detto *sottospazio di inosservabilità in t passi*, $\bar{\mathcal{O}}_t \stackrel{def}{=} \ker(\mathbf{O}_t)$.

È evidente che il sottospazio di inosservabilità in t passi $\bar{\mathcal{O}}_t$ contiene $\bar{\mathcal{O}}_{t+1}$, e che quindi la successione definita dalle dimensioni dei sottospazi di inosservabilità al crescere del numero di passi è non crescente; per cui la successione si stabilizzerà in un valore finito ≥ 0 . Per il teorema di Cayley–Hamilton, il sottospazio di inosservabilità in un numero arbitrariamente grande di passi può essere calcolato arrestandosi all’ $(n - 1)$ -esimo passo,

$$\bar{\mathcal{O}} = \ker(\mathbf{O}) \stackrel{def}{=} \ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

che viene detto *sottospazio di inosservabilità* del sistema, mentre la matrice \mathbf{O} viene detta *matrice di osservabilità del sistema*. Ogni stato distinguibile dall’origine in un numero qualsiasi di passi può essere anche distinto in non più di $n - 1$ passi.

L’insieme degli stati indistinguibili dallo stato generico $\bar{\mathbf{x}}$ al passo t è pertanto dato da

$$\mathcal{I}_t(\bar{\mathbf{x}}) = \{ \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{r}, \forall \mathbf{r} \in \bar{\mathcal{O}}_t \}$$

ed è quindi ancora un iperpiano, parallelo al sottospazio di inosservabilità in t passi, passante per $\bar{\mathbf{x}}$.

L’insieme dei punti indistinguibili da $\bar{\mathbf{x}}$ si riduce al solo punto $\bar{\mathbf{x}}$ se $\text{rank}(\mathbf{O}) = n$. In tal caso, il sistema stesso si dice *completamente osservabile*.

6.3 Ricostruibilità

Il problema di ricostruire, a partire dalle misure delle uscite in un intervallo $[T - t, T]$, lo stato all’istante T stesso riveste particolare importanza in relazione alla possibilità di retroazionare lo stato.

Due stati del sistema al tempo T , $\mathbf{x}_1(T)$ e $\mathbf{x}_2(T)$, si dicono *indistinguibili nel passato in t passi* se entrambi sono possibili soluzioni del sistema a partire da condizioni iniziali compatibili con le misure compiute sull'intervallo $[T - t, T]$.

Per la tempo-invarianza del sistema considerato, posso porre $T = t$. Scrivendo la soluzione dello stato al tempo t a partire dallo stato iniziale $\bar{\mathbf{x}}_1$ si ha

$$\mathbf{x}_1(t) \stackrel{def}{=} \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, t) = \mathbf{A}^t \bar{\mathbf{x}}_1 + \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{A}^{t-k-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k)$$

Se, in base alle misure delle uscite fatte nei passi da 0 a t , posso osservare $\bar{\mathbf{x}}_1$, certamente potrò anche stabilire univocamente $\mathbf{x}_1(t)$. Nel caso però in cui esista un insieme non banale di indistinguibilità in t passi, non sarò in grado di distinguere, sulla base delle misure di uscita, lo stato iniziale $\bar{\mathbf{x}}_1$ da uno stato $\bar{\mathbf{x}}_2$ se $(\bar{\mathbf{x}}_2 - \bar{\mathbf{x}}_1) = \tilde{\mathbf{x}} \in \ker \mathbf{O}_t$. D'altronde, lo stato al passo t a partire da $\bar{\mathbf{x}}_2$ vale

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t) \stackrel{def}{=} \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}_2, \mathbf{u}, t) &= \mathbf{A}^t \bar{\mathbf{x}}_2 + \sum_{k=0}^{t-1} \mathbf{A}^{t-k-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(k) = \\ &= \mathbf{A}^t \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}(\bar{\mathbf{x}}_1, \mathbf{u}, t) = \mathbf{A}^t \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}_1(t) \end{aligned}$$

quindi l'indistinguibilità dello stato iniziale è irrilevante ai fini della determinazione dello stato al tempo t (l'insieme dei punti indistinguibili nel passato da \mathbf{x}_1 in t passi contiene solo \mathbf{x}_1) se $\tilde{\mathbf{x}} \in \ker(\mathbf{A}^t)$.

Questo vale in generale per qualsiasi stato iniziale indistinguibile (nel futuro) se e solo se

$$\ker(\mathbf{O})_t \subseteq \ker(\mathbf{A}^t)$$

Se questa condizione è verificata, si dice che il sistema è *ricostruibile in t passi*.

Il sistema si dice *ricostruibile* se è ricostruibile per qualche t . Per il teorema di Cayley–Hamilton, questo equivale alla condizione $\ker(\mathbf{O}) \subseteq \ker(\mathbf{A}^n)$

Naturalmente, la osservabilità implica la ricostruibilità, ma non viceversa. Ad esempio, un sistema con matrice \mathbf{A} nulla è certamente ricostruibile (lo stato al passo n essendo certamente 0 a meno della evoluzione forzata che è nota) mentre non è osservabile a meno che vi siano almeno tante uscite quante stati e $\text{rank}(\mathbf{C}) = n$. Ricostruibilità e osservabilità nei sistemi LTITD sono sinonimi se \mathbf{A} è nonsingolare.

Nei sistemi LTITC, l'insieme ricostruibile in tempo t è definito in modo analogo. Per la invertibilità di $e^{\mathbf{A}t}$, comunque, nei sistemi tempo-continui i concetti di ricostruibilità e osservabilità sono coincidenti.

Si svolgeranno ora una serie di considerazioni riguardanti le proprietà di osservabilità di sistemi, che sono in stretta relazione con quelle fatte per le

proprietà di raggiungibilità. Vedremo in seguito che in effetti questa “simmetria” di trattamento è formalizzabile nel concetto di *dualità* di sistemi.

Le proprietà di osservabilità e ricostruibilità non sono alterate da cambiamenti di coordinate (sono proprietà *strutturali*). Si consideri infatti il cambiamento di coordinate $\mathbf{x} = \mathbf{Tz}$, e il sistema

$$\begin{aligned} D\mathbf{z} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Tz} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{CTz} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \end{aligned}$$

per il quale si ha

$$\hat{\mathbf{O}} = \begin{bmatrix} \mathbf{CT} \\ \mathbf{CTT}^{-1}\mathbf{AT} \\ \vdots \\ \mathbf{CTT}^{-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{OT}$$

che ha lo stesso spazio nullo di \mathbf{O} (per la ricostruibilità, basta osservare che anche $(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^t = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{T}$)

Date due rappresentazioni in coordinate diverse dello stesso sistema osservabile, e note le matrici di osservabilità nei due casi, è possibile trovare la matrice che trasforma la prima nella seconda. Infatti avendosi $\hat{\mathbf{O}} = \mathbf{OT}$, si ha $\mathbf{O}^T\hat{\mathbf{O}} = \mathbf{O}^T\mathbf{OT}$, da cui (essendo \mathbf{O} a pieno rango colonne) $\mathbf{T} = (\mathbf{O}^T\mathbf{O})^{-1}\mathbf{O}^T\hat{\mathbf{O}}$; nel caso SISO, \mathbf{O} e $\hat{\mathbf{O}}$ sono quadrate e invertibili, per cui si ha semplicemente

$$\mathbf{T} = \mathbf{O}^{-1}\hat{\mathbf{O}}$$

6.4 Sistemi LTI: sottosistemi osservabili e non

Il sottospazio di inosservabilità, sia nel caso LTITC che LTITD, ha anch'esso una caratterizzazione geometrica: esso è il più grande sottospazio \mathbf{A} -invariante contenuto in $\ker(\mathbf{C})$.

È ovvio infatti che

$$\ker \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

è contenuto in $\ker(\mathbf{C})$, e che è \mathbf{A} -invariante. Inoltre, se \mathcal{S} è contenuto in $\ker(\mathbf{C})$ ed è \mathbf{A} -invariante, esso è contenuto anche in $\ker(\mathbf{CA}^k)$, $\forall k$, e quindi $\mathcal{S} \subseteq \bar{\mathcal{O}}$.

Sia $\mathbf{T}_{\bar{\mathcal{O}}} \in \mathbb{R}^{n \times \bar{o}}$ una matrice di base per il sottospazio di inosservabilità $\bar{\mathcal{O}} = \ker(\mathbf{O})$ del sistema LTI

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}, \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned}$$

e $\mathbf{T}_O \in \mathbb{R}^{n \times (n-\bar{o})}$ una matrice di base complementare. Nelle nuove coordinate descritte da

$$\mathbf{x} = \mathbf{Tz} \stackrel{def}{=} \left[\mathbf{T}_O \mid \mathbf{T}_{\bar{O}} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{z}_O \\ \mathbf{z}_{\bar{O}} \end{bmatrix}$$

il sistema diviene

$$\begin{aligned} D\mathbf{z} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Tz} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{Tz} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D\mathbf{z}_O \\ D\mathbf{z}_{\bar{O}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_O & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{O\bar{O}} & \mathbf{A}_{\bar{O}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_O \\ \mathbf{z}_{\bar{O}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_O \\ \mathbf{B}_{\bar{O}} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_O & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_O \\ \mathbf{z}_{\bar{O}} \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

dove $\mathbf{z}_O \in \mathbb{R}^{n-\bar{o}}$ e $\mathbf{z}_{\bar{O}} \in \mathbb{R}^{\bar{o}}$.

In queste coordinate, il sistema è dunque riscritto nella forma

$$\begin{aligned} D\mathbf{z}_O &= \mathbf{A}_O\mathbf{z}_O + \mathbf{B}_O\mathbf{u} \\ D\mathbf{z}_{\bar{O}} &= \mathbf{A}_{O\bar{O}}\mathbf{z}_O + \mathbf{A}_{\bar{O}}\mathbf{z}_{\bar{O}} + \mathbf{B}_{\bar{O}}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}_O\mathbf{z}_O + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \quad (25)$$

cioè scomposto in due sottosistemi, dei quali il secondo è completamente inosservabile: infatti, lo stato $\mathbf{z}_{\bar{O}}$ non influenza l'uscita né direttamente, né attraverso lo stato \mathbf{z}_O (il contributo di \mathbf{z}_O alla evoluzione del secondo sottosistema si può guardare come un ulteriore ingresso, che mostreremo ora essere noto).

Per quanto riguarda il sottosistema con stato \mathbf{z}_O e matrici $(\mathbf{A}_O, \mathbf{B}_O, \mathbf{C}_O, \mathbf{D})$, esso è completamente osservabile: infatti, la matrice di osservabilità dell'intero sistema nelle nuove coordinate è

$$\mathbf{O}' = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_O & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_O\mathbf{A}_O & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_O\mathbf{A}_O^{n-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{O}\mathbf{T}$$

quindi, avendo \mathbf{O}' rango $n - \bar{o}$ come \mathbf{O} , le sue prime $n - \bar{o}$ colonne, le sole non nulle, sono indipendenti.

La forma 25 viene detta *forma standard di osservabilità* del sistema. Il sottosistema $(\mathbf{A}_O, \mathbf{B}_O, \mathbf{C}_O, \mathbf{D})$ è detto *sottosistema osservabile*; il sottosistema $(\mathbf{A}_{\bar{O}}, \mathbf{B}_{\bar{O}}, \mathbf{C}_{\bar{O}} = \mathbf{0}, \mathbf{D})$ è detto *sottosistema non osservabile*.

La scelta delle matrici di base $\mathbf{T}_{\bar{O}}$ e complementare \mathbf{T}_O è arbitraria: qualsiasi altra scelta porterebbe ad una forma analoga, con blocchi diagonali diversi ma simili (algebricamente equivalenti) a quelli ottenuti in altra base.

Gli autovalori di $\mathbf{A}_{\bar{O}}$ e quelli di \mathbf{A}_O sono quindi invarianti in numero e in posizione con i cambiamenti di coordinate, e sono quindi proprietà strutturali del sistema. I primi vengono detti *autovalori interni al sottospazio di inosservabilità*, i secondi *esterni*.

La parte non osservabile di un sistema non influenza la sua funzione di trasferimento. Infatti,

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} = \\ &= \left[\mathbf{C}_O \mid \mathbf{0} \right] \left[\begin{array}{c|c} s\mathbf{I}_{(n-\bar{o})} - \mathbf{A}_O & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{A}_{O\bar{O}} & s\mathbf{I}_{\bar{o}} - \mathbf{A}_{\bar{O}} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_O \\ \mathbf{B}_{\bar{O}} \end{array} \right] + \mathbf{D} = \\ &= \left[\mathbf{C}_O \mid \mathbf{0} \right] \left[\begin{array}{c|c} (s\mathbf{I}_{(n-\bar{o})} - \mathbf{A}_O)^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{M} & (s\mathbf{I}_{\bar{o}} - \mathbf{A}_{\bar{O}})^{-1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{B}_O \\ \mathbf{B}_{\bar{O}} \end{array} \right] + \mathbf{D} = \\ &= \mathbf{C}_O (s\mathbf{I}_{n-\bar{o}} - \mathbf{A}_O)^{-1} \mathbf{B}_O + \mathbf{D} \end{aligned}$$

(dove \mathbf{M} indica una matrice il cui calcolo esplicito è superfluo).

Il fatto che la f.d.t di un sistema non dipenda dal sottosistema non osservabile, e che quindi il sottosistema non osservabile non influenzi il rapporto ingresso-uscita, implica che tra i poli della $G(s)$ non appariranno gli autovalori di $\mathbf{A}_{\bar{O}}$: ciò significa che questi ultimi vengono sistematicamente cancellati da zeri coincidenti nella espressione

$$G(s) = \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} + \mathbf{D}$$

La verifica di osservabilità può essere fatta anche ricorrendo al *Lemma P.B.H.* (Popov, Belevitch, Hautus):

Teorema Il sistema LTI con matrici (\mathbf{A}, \mathbf{C}) è osservabile se e solo se la matrice

$$\mathbf{P}_o(\lambda) = \left[\begin{array}{c} \lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{array} \right] \quad (26)$$

ha rango pieno per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. La dimostrazione verte sulla possibilità di trovare un vettore \mathbf{q} tale che $\mathbf{P}_o(\lambda)\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Si riconduce direttamente a quella del lemma PBH per la raggiungibilità considerando l'equazione $\mathbf{q}^T \mathbf{P}_o^T(\lambda) = \mathbf{0}$.

Applichiamo il lemma PBH al caso di una coppia (\mathbf{A}, \mathbf{C}) con \mathbf{A} in forma di Jordan, con p miniblocchi:

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 & \cdots & & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 & & & \\ \hline & \mathbf{0} & & & \ddots & & \mathbf{0} \\ \hline & & & \mathbf{0} & \cdots & \lambda_p & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & 0 & \lambda_p & \cdots & 0 \\ & & & & & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ & & & & & 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{array} \right] ;$$

$$\mathbf{C} = \left[\mathbf{C}_{11} \quad \mathbf{C}_{21} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{m_1,1} \mid \cdots \mid \mathbf{C}_{p,1} \quad \mathbf{C}_{2,p} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{m_p,p} \right]$$

Risulta che, per essere osservabile, le prime colonne per ogni miniblocco corrispondente ad autovalori coincidenti, devono essere linearmente indipendenti. In particolare, per un sistema SISO, è necessario che la molteplicità geometrica di tutti gli autovalori sia pari a uno, e che \mathbf{C} abbia almeno tanti elementi diversi da zero quanti gli autovalori distinti di \mathbf{A} . Un sistema con μ_i miniblocchi associati ad un unico autovalore λ_i può essere osservabile solo se ha almeno μ_i uscite indipendenti.

6.5 Forma canonica di osservazione

Per un sistema SISO con matrici dinamica e di uscita nella particolare forma

$$\mathbf{A}_o = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{array} \right] ;$$

$$\mathbf{C}_o = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right]$$

(la forma di \mathbf{A}_o si dice *compagna verticale destra*), la matrice di osservabilità ha la stessa forma della matrice di raggiungibilità della forma canonica di controllo. Infatti

$$\mathbf{O}_o = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \star & \star \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} + a_{n-1}^2 & \star & \star \end{array} \right]$$

quindi è osservabile. Un qualsiasi altro sistema SISO $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ con matrice di osservabilità \mathbf{O} può essere posto per cambiamento di coordinate in questa forma (canonica di osservazione) se e solo se è completamente osservabile.

La matrice dinamica in forma compagna verticale destra è la trasposta della forma compagna orizzontale inferiore usata nella forma canonica di controllo, così come la matrice $\mathbf{C}_o = \mathbf{B}_c^T$. I coefficienti dell'ultima colonna della forma compagna verticale destra sono quindi i coefficienti del polinomio caratteristico della matrice stessa, ordinati secondo le potenze crescenti di s dall'alto in basso. Per porre un sistema SISO osservabile in forma canonica di osservazione, basterà dunque

1. Calcolare il polinomio caratteristico di \mathbf{A} , $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$;
2. costruire la matrice di osservabilità \mathbf{O} e verificarne il rango;
3. costruire $\mathbf{A}_o, \mathbf{C}_o$;
4. calcolare $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{O}_o^{-1}\mathbf{O}$;
5. trovare $\mathbf{B}_o = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}$

Se il sistema è dato in termini della sua equazione normale, scritta per convenienza nella forma

$$\sum_{i=0}^n a_i D^i y(t) - \sum_{j=0}^n b_j D^j u(t) = 0$$

con $a_n = 1$, si può scrivere il sistema in forma canonica di osservazione procedendo nella definizione degli stati secondo lo schema

$$\begin{aligned}
 0 &= a_0 y + \sum_{i=1}^n a_i D^i y(t) - b_0 u - \sum_{j=1}^n b_j D^j u \\
 D\mathbf{x}_1 &\stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^n a_i D^i y(t) - \sum_{j=1}^n b_j D^j u = -a_0 y + b_0 u \\
 \mathbf{x}_1 &= \sum_{i=1}^n a_i D^{i-1} y(t) - \sum_{j=1}^n b_j D^{j-1} u \\
 &= a_1 y + \sum_{i=2}^n a_i D^{i-1} y(t) - b_1 u - \sum_{j=2}^n b_j D^{j-1} u \\
 D\mathbf{x}_2 &\stackrel{def}{=} \sum_{i=2}^n a_i D^{i-1} y(t) - \sum_{j=2}^n b_j D^{j-1} u = \mathbf{x}_1 - a_1 y + b_1 u \\
 \mathbf{x}_2 &= \sum_{i=2}^n a_i D^{i-2} y(t) - \sum_{j=2}^n b_j D^{j-2} u \\
 &= a_2 y + \sum_{i=3}^n a_i D^{i-1} y(t) - b_2 u - \sum_{j=3}^n b_j D^{j-1} u \\
 &\vdots \\
 \mathbf{x}_{n-1} &= \sum_{i=n-1}^n a_i D^{i-n+1} y(t) - \sum_{j=n-1}^n b_j D^{j-n+1} u \\
 &= a_{n-1} y + \sum_{i=n}^n a_i D^{i-n+1} y(t) - b_{n-1} u - \sum_{j=n}^n b_j D^{j-n+1} u \\
 D\mathbf{x}_n &\stackrel{def}{=} a_n D y - b_n D u = \mathbf{x}_{n-1} - a_{n-1} y(t) + b_{n-1} u \\
 \mathbf{x}_n &= y - b_n u
 \end{aligned}$$

Si ha quindi

$$D\mathbf{x} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{array} \right] \mathbf{x} + \left[\begin{array}{c} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ b_2 - b_n a_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{array} \right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \left[0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ | \ 1 \right] \mathbf{x} + [b_n] \mathbf{u}$$

cioè proprio la forma canonica di osservazione.

Se il sistema è strettamente proprio, $b_n = 0$ quindi $\mathbf{D} = 0$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{bmatrix}$.

Dato un sistema LTI SISO in forma normale, è dunque sempre possibile scrivere un sistema in forma di stato con matrici $(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o, \mathbf{D}_o)$ in forma canonica di osservazione (quindi osservabile) che ha lo stesso rapporto ingresso/uscita.

Esempio: Data l'equazione $\ddot{y} + y = 2u + \dot{u}$, un sistema in forma di stato

che la realizza (in forma canonica di osservazione) è

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0. \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento per un sistema SISO strettamente proprio in forma canonica di osservazione vale $G(s) = \mathbf{C}_o(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_o)^{-1}\mathbf{B}_o$. Si verifica facilmente che

$$G(s) = \frac{b_ms^m + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

In altre parole, nella forma canonica di osservazione di un sistema strettamente proprio si trovano i coefficienti del polinomio caratteristico nell'ultima colonna della matrice dinamica \mathbf{A}_o , e i coefficienti del polinomio degli zeri nella matrice degli ingressi \mathbf{B}_o .

Per un sistema proprio non strettamente, operando una opportuna divisione tra i polinomi a numeratore e denominatore, cioè scrivendo $G(s) = G'(s) + b_n$ con $G'(s)$ strettamente proprio, si hanno in \mathbf{B}_o i primi n coefficienti del polinomio degli zeri di $G'(s)$, ed in \mathbf{D}_o il coefficiente del termine di grado n , b_n .

6.6 Stima ottima

Torniamo a considerare il problema di stimare lo stato iniziale $\bar{\mathbf{x}}$ di un sistema conoscendone esattamente il modello e gli ingressi nell'intervallo $[0, t]$, oltreché le uscite nello stesso intervallo. Nel caso LTITD la conoscenza esatta del valore delle uscite su n campioni determina esattamente lo stato: se il numero di misure N è maggiore, se ne possono in linea di principio trascurare $N - n$. Nel caso LTITC ci troviamo davanti ad una serie continua di misure su $[0, t]$: anche in questo caso è concepibile utilizzare solo il numero strettamente necessario di misure prese ad istanti discreti nell'intervallo, trascurando le altre infinite misure disponibili che non possono che essere linearmente dipendenti da quelle considerate.

Naturalmente questo approccio alla stima dello stato è molto riduttivo, e non ci dice nulla né sul come scegliere le misure da utilizzare, né sul perché si debbano scartare misure che comunque contengono informazione sul sistema. Per una migliore comprensione del problema, è necessario considerare che la conoscenza delle uscite ad un dato istante non può che essere pensata, nella grande maggioranza delle applicazioni, come affetta da errori di misura. Questi ultimi possono essere introdotti nel modello del sistema aggiungendo

un termine non noto di errore $\delta\mathbf{y}$, cioè

$$\begin{aligned} D\mathbf{x}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} + \delta\mathbf{y}(t) \end{aligned}$$

Non si faranno in questa sede considerazioni sulla caratterizzazione del termine di errore di misura, che potrebbe essere fatta in termini probabilistici (media, varianza etc.) o deterministici (massimo valore dell'errore nel peggior caso), lasciandole a corsi specialistici. Ci limiteremo qui a supporre che $\delta\mathbf{y}$ sia piccolo rispetto alle misure \mathbf{y} .

Considerando la funzione di uscita in dipendenza dal punto iniziale, si ha per un sistema LTITD

$$\mathbf{y}(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{u}(\cdot), \tau) = \mathbf{C}\mathbf{A}^\tau\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{y}_f(\tau) + \delta\mathbf{y}(\tau)$$

che rappresenta, ad ogni istante τ , un sistema di p equazioni lineari nelle n incognite $\bar{\mathbf{x}}$. Il termine forzato $\mathbf{y}_f(\tau)$ è noto se si suppone noto l'ingresso ed il modello: pertanto possiamo pensare di inglobarlo nelle misure, e lo trascureremo d'ora innanzi. L'insieme delle misure su un intervallo $[0, t]$ può dunque essere scritto nella forma $\mathbf{Y} = \mathbf{O}_t\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{N}$, dove \mathbf{Y} e \mathbf{N} sono due vettori a pt componenti che impilano le misure e gli errori incogniti. Il sistema $\mathbf{Y} = \mathbf{O}_t\bar{\mathbf{x}}$ di pt equazioni in $n < pt$ incognite è dunque inconsistente: avrà senso porsi il problema di trovare la stima migliore di $\bar{\mathbf{x}}$ nel senso di minimizzare una norma dei residui, cioè

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \arg \min_{\bar{\mathbf{x}}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{O}_t\bar{\mathbf{x}}\|$$

Scegliendo in particolare la norma due pesata, o meglio il suo quadrato, si ottiene un problema di minimi quadrati

$$\bar{\mathbf{x}}_{LS} = \arg \min_{\bar{\mathbf{x}}} (\mathbf{Y} - \mathbf{O}_t\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{W}_y (\mathbf{Y} - \mathbf{O}_t\bar{\mathbf{x}})$$

che è risolto, derivando la funzione da minimizzare rispetto a $\bar{\mathbf{x}}$ e uguagliando a zero la derivata

$$2(\mathbf{Y} - \mathbf{O}_t\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{W}_y \mathbf{O}_t = 0$$

da

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = (\mathbf{O}_t^T \mathbf{W}_y \mathbf{O}_t)^{-1} \mathbf{O}_t^T \mathbf{W}_y \mathbf{Y}$$

Il significato che può essere dato alla matrice di pesi \mathbf{W}_y è quello di affidabilità delle misure (per un sistema SISO, l'elemento diagonale i -esimo è tanto maggiore quanto maggiore è l'affidabilità della misura al passo i -esimo); questo concetto si formalizza meglio, in presenza di una caratterizzazione statistica

degli errori di misura, con la inversa della covarianza degli stessi. Altra importante funzione di \mathbf{W}_y è quella di normalizzare le dimensioni fisiche delle equazioni, e di rendere quindi la soluzione invariante al variare dei sistemi di riferimento e di unità di misura.

Nel caso LTITC, si procede in modo analogo a scrivere una equazione di misura (in cui si tenga già conto della risposta forzata) $\mathbf{y}(\tau) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\bar{\mathbf{x}} + \delta\mathbf{y}(\tau)$, in ognuno degli (infiniti) istanti dell'intervallo continuo $[0, t]$. Ci troviamo quindi anche qui di fronte ad un sistema di equazioni inconsistente (infinite equazioni in n incognite con errori), e al problema di stimare

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \arg \min_{\bar{\mathbf{x}}} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\bar{\mathbf{x}}\|$$

dove la norma della funzione residuo è da intendersi come una norma su uno spazio di funzioni definite su $[0, t]$.

Considerando in particolare la norma due pesata, o meglio il suo quadrato, si ha

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \arg \min_{\bar{\mathbf{x}}} \int_0^t (\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\bar{\mathbf{x}})^T \mathbf{W}_y(\tau) (\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{C}e^{\mathbf{A}\tau}\bar{\mathbf{x}}) d\tau$$

e, ancora ponendo uguale a zero la derivata rispetto a $\bar{\mathbf{x}}$, si ottiene

$$\int_0^t e^{\mathbf{A}^T\tau} \mathbf{C}^T \mathbf{W}_y(\tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T\tau} \mathbf{C}^T \mathbf{W}_y(\tau) \mathbf{C} e^{\mathbf{A}\tau} \bar{\mathbf{x}} d\tau \stackrel{def}{=} \mathcal{G}_{Ot} \bar{\mathbf{x}}$$

Se il sistema è osservabile, la matrice di integrali che moltiplica $\bar{\mathbf{x}}$ nel termine a destra (detta *Gramiano di Osservabilità*) è invertibile. Sappiamo infatti che se il sistema è osservabile, è osservabile per qualsiasi t : se quindi la matrice è invertibile, lo deve essere per qualsiasi intervallo di integrazione. Inoltre, dal fatto che il Gramiano è perlomeno semi-definito positivo (integrale di prodotti di matrici una trasposta dell'altra, con \mathbf{W}_y definita positiva), e dal consueto sviluppo dell'esponenziale di matrice, segue che il Gramiano è non-invertibile se e solo se esiste un vettore $\bar{\mathbf{x}}$ che annulla tutti i prodotti del tipo $\mathbf{C}\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{C}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{C}\mathbf{A}^2\bar{\mathbf{x}}$, \dots , quindi se e solo se il sistema è non-osservabile.

Per un sistema osservabile, si ha dunque

$$\hat{\bar{\mathbf{x}}} = \mathcal{G}_{Ot}^{-1} \int_0^t e^{\mathbf{A}^T\tau} \mathbf{C}^T \mathbf{W}_y(\tau) \mathbf{y}(\tau) d\tau$$

La matrice $p \times p$ $\mathbf{W}_y(\tau)$, eventualmente funzione del tempo, ha ancora il significato di pesare la affidabilità delle p misure prese all'istante τ tra di loro, e rispetto a quelle prese in altri istanti.

6.7 Scomposizione canonica

Si è visto in precedenza che un sistema LTI può essere scritto in due forme standard, che riflettono le sue proprietà di raggiungibilità e osservabilità. Combinando questi due risultati, si giunge ad una forma più articolata, che li contiene entrambe.

Siano dunque per il sistema LTI con matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ rispettivamente \mathcal{R} e $\bar{\mathcal{O}}$ i sottospazi di raggiungibilità e inosservabilità. Essendo entrambe \mathbf{A} -invarianti, lo sarà anche la loro intersezione $\mathcal{R} \cap \bar{\mathcal{O}}$. Se \mathbf{T}_R e $\mathbf{T}_{\bar{\mathcal{O}}}$ sono rispettivamente matrici di base per \mathcal{R} e $\bar{\mathcal{O}}$, una base $\mathbf{T}_{R\bar{\mathcal{O}}}$ per la intersezione si trova risolvendo l'equazione $\mathbf{T}_R \xi_1 = \mathbf{T}_{\bar{\mathcal{O}}} \xi_2$. Se

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}$$

è una base di $\ker[\mathbf{T}_R | \mathbf{T}_{\bar{\mathcal{O}}}]$, allora $\mathbf{T}_{R\bar{\mathcal{O}}} = \mathbf{T}_R \mathbf{N}_1 = -\mathbf{T}_{\bar{\mathcal{O}}} \mathbf{N}_2$ è una base del sottospazio cercato. L'algoritmo, in linguaggio Matlab, è realizzato ad esempio come segue:

```
function [C]=intesect(A,B);
% C: Basis Matrix for Intersection
%   of Range(A) with Range(B)
[ra,ca]=size(A);
[rb,cb]=size(B);
C=null([A B]);
if length(C) > 0
    C=orth(A*C(1:ca,:));
else
    C=[];
end
```

Le funzioni Matlab `null.m` e `orth.m` sono usate per calcolare rispettivamente lo spazio nullo di una matrice, e per operare una ortogonalizzazione di Gram-Schmidt sulle colonne di una matrice (l'uso della ortogonalizzazione non è strettamente necessario, ma migliora il condizionamento numerico della base ottenuta).

Si consideri inoltre una matrice di base \mathbf{T}_{RO} complementare a $\mathbf{T}_{R\bar{\mathcal{O}}}$ per \mathcal{R} . Anche questa operazione si può effettuare con un semplice algoritmo, espresso in linguaggio Matlab come segue:

```
function [D] = base_compl(A,B)
% D : base di range(A) complementare a B
[ra,ca] = size(A);
[rb,cb] = size(B);
D = orth([B A]);
[rd,cd] = size(D);
D = D(:,cb+1:cd);
```

Si proceda allo stesso modo a costruire una matrice di base $\mathbf{T}_{\bar{R}\bar{O}}$ complementare a $\mathbf{T}_{R\bar{O}}$ per \bar{O} . Infine, si costruisca una matrice di base $\mathbf{T}_{\bar{R}O}$ complementare a $[\mathbf{T}_{RO}|\mathbf{T}_{R\bar{O}}|\mathbf{T}_{\bar{R}\bar{O}}]$ per l'intero spazio \mathbb{R}^n .

La matrice $[\mathbf{T}_{RO}|\mathbf{T}_{R\bar{O}}|\mathbf{T}_{\bar{R}O}|\mathbf{T}_{\bar{R}\bar{O}}]$ è quadrata e invertibile. Se usata per cambiare le coordinate del sistema, si ottiene la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{RO} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\bar{R}O,RO} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{RO,R\bar{O}} & \mathbf{A}_{R\bar{O}} & \mathbf{A}_{\bar{R}O,R\bar{O}} & \mathbf{A}_{\bar{R}\bar{O},R\bar{O}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\bar{R},O} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\bar{R}O,\bar{R}\bar{O}} & \mathbf{A}_{\bar{R}\bar{O}} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{RO} \\ \mathbf{B}_{R\bar{O}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{RO} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\bar{R}O} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Dalla interpretazione grafica di questa forma, risulta evidente che solo la parte raggiungibile e osservabile del sistema partecipa al rapporto ingresso-uscita.

I poli di $G(s)$ saranno pertanto tutti e soli gli autovalori di \mathbf{A}_{RO} :

$$G(s) = \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{C}_{RO} (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_{RO})^{-1} \mathbf{B}_{RO}$$

6.8 Osservabilità di sistemi non LTI

Come è logico attendersi, l'analisi della osservabilità per sistemi tempo-varianti e nonlineari in generale è più complessa che nei casi LTI. Osserviamo solamente che vale il seguente

Teorema. Se per il sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ con uscita $\mathbf{y} = \mathbf{h}(x)$, il sistema linearizzato approssimato attorno a $\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}$ ($\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}) = 0$), $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\mathbf{u}$, $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\mathbf{z}$ è osservabile, allora l'insieme indistinguibile da $\bar{\mathbf{x}}$ contiene, in un intorno di $\bar{\mathbf{x}}$, il solo punto $\bar{\mathbf{x}}$.

Quindi, la osservabilità (globale) del linearizzato approssimato implica la osservabilità (locale) del sistema effettivo. Questa condizione è solo sufficiente: ad esempio, il sistema che rappresenta la localizzazione di un veicolo su ruote mediante triangolazione di due traguardi ottici in posizione $(0, 0)$ e $(0, d)$, che si scrive

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} v \cos \theta \\ v \sin \theta \\ w \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}_1 &= \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \mathbf{y}_2 &= \pi - \theta + \arctan\left(\frac{y-d}{x}\right) \end{aligned}$$

ha un linearizzato (in un equilibrio qualsiasi) con $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, quindi non è osservabile. Comunque, il vero sistema è certamente osservabile.

7 Sistemi LTI: Risposte Forzate e Calcolo Operazionale

Ricordiamo le espressioni della risposta forzata dei sistemi LTITC

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}(0) = 0, u(t), t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau$$

e LTITD

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}(0) = 0, u(t), t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{A}^{t-\tau-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau)$$

In entrambe i casi, esso è dato dalla somma delle convoluzioni della i -esima componente del segnale di ingresso $\mathbf{u}_i(t)$ con la evoluzione libera dello stato a partire da condizioni iniziali pari alla i -esima colonna della matrice degli ingressi $\mathbf{B}(:, i)$.

Il calcolo esplicito della risposta forzata per sistemi e ingressi generici è molto semplificato se si usa il cosiddetto *calcolo operazionale*, introdotto nell'ingegneria da Heaviside e in seguito reso matematicamente rigoroso da Laplace (per il tempo continuo) e altri, con l'introduzione della teoria delle distribuzioni (funzioni impulsive etc.).

Consideriamo di nuovo la forma normale dei sistemi lineari stazionari SISO

$$D^n y = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) D^i y + \sum_{j=0}^p b_j(t) D^j u,$$

e indichiamo con $y_p(t)$ la evoluzione forzata corrispondente all'ingresso $u(t)$.

Considereremo solo sistemi causali, per i quali è sempre possibile supporre che esista un tempo, convenzionalmente posto a 0, prima del quale entrambe i segnali u e y_p sono identicamente nulli. A ogni funzione/successione $u(t)$ nell'insieme \mathcal{D} delle funzioni/successioni che soddisfano $u(t) = 0, \forall t < 0$, corrisponde una unica $y_p(t) \in \mathcal{D}$; inoltre questa mappa è lineare.

Per convenienza, associamo allo spazio delle funzioni/successioni semi-infinite \mathcal{D} uno spazio di funzioni di variabile complessa attraverso le definizioni seguenti:

Trasformata monolatera di Laplace della funzione $f(t) \in \mathcal{D}$:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \stackrel{def}{=} \int_{t=0}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (27)$$

definita per ogni $s \in \mathbb{C}$ in cui l'integrale esiste.

Trasformata Z monolatera della successione $f(t) \in \mathcal{D}$:

$$\mathcal{Z}[f(t)] = F(z) \stackrel{def}{=} \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t} \quad (28)$$

definita per ogni $z \in \mathbb{C}$ in cui la serie esiste.

Osservazione. Non per tutte le funzioni/successioni semi-infinita esiste una trasformata. Condizioni necessarie e sufficienti perché esistano le trasformate sono nei due casi:

$$TC : f(t) \text{ quasi-continua e } \exists A \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R} : |f(t)| < Ae^{\sigma t}, \forall t$$

$$TD : \exists A \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R} : |f(t)| < A\sigma^t, \forall t$$

La dimostrazione segue dai teoremi di convergenza degli integrali/serie di funzioni/successioni maggiorate in modulo da funzioni/successioni per le quali gli integrali/serie convergano. Con gli stessi argomenti si dimostrano i seguenti fatti:

— Se l'integrale 27 esiste per un certo $s_* = \sigma_* + \mathbf{j}\omega_*$, allora esiste per ogni $s = \sigma + \mathbf{j}\omega$ con $\sigma > \sigma_*$.

— Se la serie 28 esiste per un certo $z_* = \rho_*e^{\mathbf{j}\phi_*}$, allora esiste per ogni $z = \rho e^{\mathbf{j}\phi}$, con $\rho > \rho_*$.

Quindi, si può parlare nei due casi di una *regione di convergenza* del piano complesso, che è rappresentata rispettivamente

— dal semipiano a parte reale maggiore dell'estremo inferiore σ_* delle parti reali dei punti s per cui si ha convergenza. Si dice *ascissa di convergenza* tale valore σ_* ;

— dall'esterno del cerchio di raggio ρ_* , estremo inferiore dei moduli dei punti z per cui si ha convergenza. Si dice *raggio di convergenza* tale valore ρ_* .

Esempi:

Funzione gradino (o di Heaviside) TC, definita da

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Dalla definizione si ha in TC

$$\mathcal{L}[H(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s}[e^{-st}]_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

con ascissa di convergenza $\sigma_* = 0$.

Il gradino in TD è definito allo stesso modo, e si ha

$$\mathcal{Z}[H(t)] = \sum_0^{\infty} z^{-t} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

con raggio di convergenza $\rho_* = 1$.

Dalla definizione di impulso di Dirac TC, si ha

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-st} dt = e^{-s0} = 1$$

Più in generale, $\mathcal{L}[a\delta(t - \tau)] = ae^{-s\tau}$, per $\tau > 0$.

Dalla definizione di impulso TD ($\delta(0) = 1, \delta(t) = 0 \forall t \neq 0$), si ha

$$\mathcal{Z}[\delta(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} \delta(t)z^{-t} = z^0 = 1$$

Più in generale, $\mathcal{Z}[a\delta(t - \tau)] = az^{-\tau}$, per $\tau > 0$.

Modi esponenziali reali TC:

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} H(t)] = \int_0^{\infty} e^{(\lambda-s)t} dt = \frac{1}{\lambda - s} [e^{(\lambda-s)t}]_0^{\infty} = \frac{1}{s - \lambda}$$

con ascissa di convergenza $\sigma_* = \lambda$

Modi esponenziali reali TD:

$$\mathcal{Z}[\lambda^t H(t)] = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t z^{-t} = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{z}\right)^t = \frac{1}{1 - \lambda z^{-1}} = \frac{z}{z - \lambda}$$

con raggio di convergenza $\rho_* = |\lambda|$

Modi quasi-polinomiali reali TC (autovalori in λ , miniblocco di ordine q):

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{(q-1)}e^{\lambda t}}{(q-1)!} H(t)\right] = \frac{1}{(s - \lambda)^q}$$

Dimostrazione: partendo dalla trasformata dei modi esponenziale

$$\mathcal{L}[e^{\lambda t} H(t)] = \int_0^{\infty} e^{(\lambda-s)t} dt = \frac{1}{s - \lambda}$$

si derivino il secondo e terzo membro $q - 1$ volte rispetto a λ :

$$\mathcal{L}[t^{q-1} e^{\lambda t} H(t)] = \frac{(q-1)!}{(s - \lambda)^q}$$

da cui, dividendo per $(q - 1)!$, la tesi. L'ascissa di convergenza è ancora $\sigma_* = \lambda$.

Modi quasi-polinomiali reali TD (autovalore in λ , miniblocco di ordine q):

$$\mathcal{Z} \left[C_{q-1}^t \lambda^{(t-q+1)} H(t) \right] = \frac{z}{(z - \lambda)^q}$$

Dimostrazione: partendo dalla trasformata dei modi esponenziali

$$\mathcal{Z} \left[\lambda^t H(t) \right] = \sum_{t=0}^{\infty} \lambda^t z^{-t} = \frac{z}{z - \lambda}$$

si derivino il secondo e terzo membro $q - 1$ volte rispetto a λ :

$$\sum_{t=0}^{\infty} t(t-1) \cdots (t-q+2) \lambda^{t-q+1} z^{-t} = \frac{(q-1)! z}{(z - \lambda)^q}$$

da cui, dividendo per $(q-1)!$, la tesi. Il raggio di convergenza è ancora $\rho_* = |\lambda|$

Al di fuori della regione di convergenza, le funzioni complesse $F(s)$ e $F(z)$ possono essere ancora considerate (per *prolungamento analitico di Weierstrass*) su tutto il piano complesso, eccetto che per i punti di singolarità. Almeno un punto di singolarità cade sulle curve (retta e cerchio) che delimitano le regioni di convergenza.

Le operazioni di trasformazione sono lineari:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \alpha \mathcal{L} [f(t)] + \beta \mathcal{L} [g(t)]; \\ \mathcal{Z} [\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \alpha \mathcal{Z} [f(t)] + \beta \mathcal{Z} [g(t)]; \end{aligned}$$

Questa proprietà ci permette di calcolare facilmente le trasformate dei modi oscillanti dei sistemi LTI

Modi associati ad autovalori immaginari $\pm j\omega$ in TC: ponendo $\lambda = \pm j\theta$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\sin \omega t] &= \mathcal{L} \left[\frac{e^{j\omega t}}{2j} - \frac{e^{-j\omega t}}{2j} \right] \\ &= \frac{1}{2j} \mathcal{L} [e^{j\omega t}] - \frac{1}{2j} \mathcal{L} [e^{-j\omega t}] \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [\cos \omega t] &= \mathcal{L} \left[\frac{e^{j\omega t}}{2} + \frac{e^{-j\omega t}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{L} [e^{j\omega t}] + \frac{1}{2} \mathcal{L} [e^{-j\omega t}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

con ascissa di convergenza $\sigma_* = 0$.

Modi associati ad autovalori complessi a modulo unitario $e^{\pm j\theta}$ in TD: ponendo $\lambda = e^{\pm j\theta}$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} [\sin \theta t] &= \mathcal{Z} \left[\frac{e^{j\theta t}}{2j} - \frac{e^{-j\theta t}}{2j} \right] \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{z}{z - e^{j\theta}} - \frac{z}{z - e^{-j\theta}} \right] = \frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[\cos \theta t] &= \mathcal{Z}\left[\frac{e^{j\theta t}}{2} + \frac{e^{-j\theta t}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left[e^{j\theta t}\right] + \frac{1}{2}\mathcal{Z}\left[e^{-j\theta t}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{z}{z-e^{j\theta}} + \frac{z}{z-e^{-j\theta}}\right] = \frac{z^2 - z \cos \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1},\end{aligned}$$

con raggio di convergenza $\rho_* = 1$.

In modo del tutto analogo si trova per autovalori in $\sigma \pm \mathbf{j}\omega$ in TC:

$$\mathcal{L}\left[e^{\sigma t} \sin \omega t\right] = \frac{\omega}{(s - \sigma)^2 + \omega^2}$$

e

$$\mathcal{L}\left[e^{\sigma t} \cos \omega t\right] = \frac{s - \sigma}{(s - \sigma)^2 + \omega^2},$$

($\sigma_* = \sigma$),

e per autovalori in $\rho e^{j\theta}$ in TD:

$$\mathcal{Z}\left[\rho^t \sin \theta t\right] = \frac{\frac{z}{\rho} \sin \theta}{\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2\frac{z}{\rho} \cos \theta + 1}$$

e

$$\mathcal{Z}\left[\rho^t \cos \theta t\right] = \frac{\frac{z}{\rho}(\frac{z}{\rho} - \cos \theta)}{\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2\frac{z}{\rho} \cos \theta + 1},$$

($\rho_* = \rho$).

Infine si ha per autovalori in $\sigma \pm \mathbf{j}\omega$ con miniblocco di ordine q in TC:

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} e^{\sigma t} \sin \omega t\right] = \frac{1}{2\mathbf{j}} \frac{[(s - \sigma) + \mathbf{j}\omega]^q - [(s - \sigma) - \mathbf{j}\omega]^q}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2]^q}$$

e

$$\mathcal{L}\left[\frac{t^{(q-1)}}{(q-1)!} e^{\sigma t} \cos \omega t\right] = \frac{1}{2} \frac{[(s - \sigma) + \mathbf{j}\omega]^q + [(s - \sigma) - \mathbf{j}\omega]^q}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2]^q}$$

(osserva che i termini immaginari scompaiono sistematicamente nello sviluppo delle potenze: ad es., $\mathcal{L}[te^{\sigma t} \cos \omega t] = \frac{(s - \sigma)^2 - \omega^2}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2]^2}$).

mentre per autovalori in $\rho e^{\pm j\theta}$ con miniblocco di ordine q in TD si ha

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[C_{q-1}^t \rho^{t-q+1} \sin(\theta(t - q + 1))\right] &= \\ &= \frac{\rho^{-q+1} \frac{z}{\rho} \left[\left(\frac{z}{\rho} - e^{-j\theta}\right)^q - \left(\frac{z}{\rho} - e^{j\theta}\right)^q \right]}{2\mathbf{j} \left[\left(\frac{z}{\rho}\right)^2 - 2\frac{z}{\rho} \cos(\theta) + 1 \right]^q}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left[C_{q-1}^t \rho^{t-q+1} \cos(\theta(t-q+1)) \right] &= \\ &= \frac{\rho^{-q+1} \frac{z}{\rho} \left[\left(\frac{z}{\rho} - e^{j\theta} \right)^q + \left(\frac{z}{\rho} - e^{-j\theta} \right)^q \right]}{2 \left[\left(\frac{z}{\rho} \right)^2 - 2 \frac{z}{\rho} \cos(\theta) + 1 \right]^q} \end{aligned}$$

(i termini immaginari scompaiono sistematicamente nello sviluppo delle potenze)

Traslazione in TC

A destra: se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, allora per $\tau > 0$ $\mathcal{L}[f(t-\tau)] = F(s)e^{-s\tau}$.

Infatti, se $t' = t - \tau$

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = \int_{t'=0}^{\infty} f(t') e^{-s(t'+\tau)} dt' = e^{-s\tau} F(s)$$

A sinistra: se $\tau < 0$, si viola l'ipotesi di semi-infinitezza di $f(\cdot)$. Ma se si ignora ciò che avviene prima di $t = 0$, cioè se si ridefinisce

$$f(t+|\tau|) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f(t-\tau) & t \geq 0 \end{cases}$$

allora si ha

$$\mathcal{L}[f(t+|\tau|)] = e^{s|\tau|} \left(F(s) - \int_{t=0}^{\tau} f(t) e^{-st} dt \right)$$

Traslazione in TD.

A destra: se $\mathcal{Z}[f(t)] = F(z)$, allora per $\tau > 0$ $\mathcal{Z}[f(t-\tau)] = F(z)z^{-\tau}$.

Infatti, posto $t' = t - \tau$,

$$\mathcal{Z}[f(t-\tau)] = \sum_{t'=0}^{\infty} f(t') z^{-t'} z^{-\tau} = z^{-\tau} F(z)$$

A sinistra: se $\tau < 0$, si viola l'ipotesi di semi-infinitezza di $f(\cdot)$. Ma se si ignora ciò che avviene prima di $t = 0$, cioè se si ridefinisce

$$f(t+|\tau|) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ f(t-\tau) & t \geq 0 \end{cases}$$

allora si ha

$$\mathcal{Z}[f(t+|\tau|)] = z^{|\tau|} \left(F(z) - \sum_{t=0}^{\tau-1} f(t) z^{-t} \right)$$

Caso particolarmente **importante:** per $|\tau| = 1$

$$\mathcal{Z}[f(t+1)] = z(F(z) - f(0))$$

cioè, data la successione $f(t) = \dots, f(-2) = 0, f(-1) = 0, f(0) = f_0, f(1) = f_1, f(2) = f_2, \dots$ con $\mathcal{Z}[f(t)] = F(z)$, la Z-trasformata della successione $f(t+1) = \dots, f(-2) = 0, f(-1) = 0, f(0) = f_1, f(1) = f_2, f(3) = f_4, \dots$ vale $zF(z) - zf_0$.

$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s - \alpha)$ (traslazione nel dominio “s”).

$\mathcal{Z}[\alpha^t f(t)] = F(\frac{z}{\alpha})$ (cambiamento di scala nel dominio “z”).

Trasformate e convoluzioni

Uno dei più importanti vantaggi offerti dalle trasformate è legato alla espressione particolarmente semplice che assumono i segnali ottenuti per convoluzione: la trasformata di un prodotto di convoluzione è pari al prodotto delle trasformate dei segnali convoluti. Iniziamo dal caso TD

Siano $f(t)$ e $g(t)$ due segnali, e sia

$$w(t) = f(t) * g(t) = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau)$$

la loro convoluzione. Se $f(t)$ e $g(t)$ sono entrambe semi-infiniti, come sarà sempre il caso per noi, si ha equivalentemente $w(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)$. Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f * g] &\stackrel{def}{=} \sum_{t=0}^{+\infty} \left\{ \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f(t - \ell)g(\ell) \right\} z^{-t} \\ &= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} f(t - \ell)g(\ell) z^{-(t-\ell)} z^{-\ell} \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{t=-\infty}^{+\infty} f(t - \ell)z^{-(t-\ell)} \right\} g(\ell)z^{-\ell} \end{aligned}$$

e poiché nella sommatoria interna ℓ è una costante, e la sommatoria interna stessa è costante rispetto a ℓ (infatti converge a $F(z)$), si ha la tesi: $\mathcal{Z}[f * g] = F(z)G(z)$.

Siano ora $f(t)$ e $g(t)$ due segnali TC, e sia

$$w(t) = f(t) * g(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

la loro convoluzione.

Se $f(t)$ e $g(t)$ sono entrambe semi-infiniti, si ha equivalentemente $w(t) = \int_{\tau=0}^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$. Si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f * g] &\stackrel{def}{=} \int_{t=0}^{+\infty} \left\{ \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau \right\} e^{-st} dt \\ &= \int_{t=-\infty}^{+\infty} \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} f(t - \tau)g(\tau) e^{-s(t-\tau)} e^{-s\tau} d\tau dt \\ &= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) e^{-s(t-\tau)} d(t - \tau) \right\} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau \end{aligned}$$

e poiché nell'integrale interno τ è una costante, e l'integrale stesso è costante rispetto a τ (infatti converge a $F(s)$), si ha la tesi: $\mathcal{L}[f * g] = F(s)G(s)$.

Trasformata della derivata e dell'integrale di una funzione:

Supponendo che $f(t)$ non abbia impulsi nell'origine, se $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, si ha $\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = sF(s) - f(0)$. Infatti, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\dot{f}(t)] &\stackrel{def}{=} \int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t) e^{-st} dt \\ &= [f(t) e^{-st}]_0^\infty + \int_0^\infty f(t) s e^{-st} dt \\ &= sF(s) - f(0)\end{aligned}$$

Per l'integrale, vale invece $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$. Infatti, applicando il risultato precedente alla funzione $g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, e notando che, se $f(t)$ non ha impulsi nell'origine, $g(0) = 0$, si ha

$$\mathcal{L}[f(t)] = s\mathcal{L}[g(t)].$$

7.1 La funzione impulso – δ di Dirac

L'impulso $\delta(t)$ sopra definito ha alcune proprietà molto utili nella teoria dei sistemi. In particolare, dalla sua definizione si ricava immediatamente che la sua convoluzione con una qualsiasi funzione/successione la lascia inalterata:

$$\begin{aligned}f(t) * \delta(t) &= \int_0^t f(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = f(t) \\ f(t) * \delta(t) &= \sum_{\tau=0}^t f(t - \tau) \delta(\tau) = f(t)\end{aligned}$$

Rispetto al prodotto tra funzioni definito dalla convoluzione, l'impulso ha quindi il ruolo dell'unità.

L'impulso TC può essere anche caratterizzato in modo più facilmente visualizzabile come limite

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{H(t) - H(t - \Delta)}{\Delta}$$

cioè come un impulso quadrato di durata Δ infinitesima e ampiezza $1/\Delta$ infinita, il cui integrale vale 1 su qualunque intervallo lo contenga. Le due definizioni sono consistenti, infatti si ha

$$\int_0^t f(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = f(t) = \int_0^t f(t - \tau) \left[\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{H(\tau) - H(\tau - \Delta)}{\Delta} \right] d\tau =$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[\int_0^t f(t-\tau) \frac{H(\tau)}{\Delta} d\tau - \int_0^t f(t-\tau) \frac{H(\tau-\Delta)}{\Delta} d\tau \right] = \\
 &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[\int_0^t f(t-\tau) d\tau - \int_{\Delta}^t f(t-\tau) d\tau \right] = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left[\int_0^{\Delta} f(t-\tau) d\tau \right] = f(t)
 \end{aligned}$$

Teoremi dei valori iniziale e finale

Valore iniziale TC: $f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
 (dove il limite si deve intendere per $\Re(s) \rightarrow +\infty$). Discende direttamente dalla espressione della trasformata della derivata

$$\int_0^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt = sF(s) - f(0)$$

quando si passa al limite per $\Re(s) \rightarrow \infty$ (in pratica, si calcola il limite con $s \in \mathbb{R}$).

Valore iniziale TD: $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \left(\frac{z-1}{z} \right)$
 (dove il limite si deve intendere per $|z| \rightarrow +\infty$). Direttamente dalla definizione:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \sum_0^{\infty} f(t) z^{-t} = \lim_{|z| \rightarrow \infty} (f(0) + f(1)z^{-1} + \dots) = f(0)$$

(in pratica, si calcola il limite con $z \in \mathbb{R}$).

Valore finale TC: Se sia $f(t)$ che $\dot{f}(t)$ hanno ascissa di convergenza non positiva, e se inoltre esiste reale (anche ∞) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

Infatti, usando ancora il teorema di trasformazione della derivata,

$$\int_0^{\infty} \dot{f}(t) e^{-st} dt = s \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \right) - f(0)$$

e passando al limite per $s \rightarrow 0$ (qui serve l'ipotesi sulle ascisse di convergenza),

$$\int_0^{\infty} \dot{f}(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0)$$

dove si usa l'ipotesi di esistenza del limite.

Osservazione: le ipotesi del teorema del valore finale TC, nel caso in cui si considerino come $f(t)$ delle combinazioni di modi di un sistema lineare, coincidono col chiedere che i modi siano tutti convergenti o al più limitati ma non oscillanti (considera e.g. $f(t) = h(t)$ [$F(s) = \frac{1}{s}$], e $f(t) = \cos \omega t$

$[F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}]$). Nel caso di modi polinomialmente divergenti non oscillanti si ha $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ (e.g. $f(t) = t^k$ $[F(s) = \frac{1}{s^{k+1}}]$)

Valore finale TD: se $f(t)$ ha raggio di convergenza minore di uno, e se esiste finito $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \stackrel{def}{=} f_\infty$ (cioè se $\forall \epsilon > 0, \exists T : \forall \tau > 0 |f(T + \tau) - f_\infty| < \epsilon$), allora

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)}{z} F(z)$$

(dove il limite si deve intendere per $|z| \rightarrow 1_+$, ad es. $z \in \mathbb{R}, z > 1$). Infatti:

$$\begin{aligned} F(z) &\stackrel{def}{=} \sum_{t=0}^{\infty} f(t)z^{-t} = \sum_{t=0}^{T-1} f(t)z^{-t} + \sum_{\tau=0}^{\infty} f(T + \tau)z^{-(T+\tau)} = \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} f(t)z^{-t} + z^{-T} \left\{ \sum_{\tau=0}^{\infty} [f(T + \tau) - f_\infty] z^{-\tau} + \sum_{\tau=0}^{\infty} f_\infty z^{-\tau} \right\} = \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} f(t)z^{-t} + z^{-T} \sum_{\tau=0}^{\infty} [f(T + \tau) - f_\infty] z^{-\tau} + z^{-T} f_\infty \frac{z}{z-1} \end{aligned}$$

Moltiplicando ambo i membri per $(z-1)$ e passando al limite si ha ovviamente

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \sum_{t=0}^{T-1} f(t)z^{-t} = 0$$

mentre

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \left| (z-1) z^{-T} \sum_{\tau=0}^{\infty} [f(T + \tau) - f_\infty] z^{-\tau} \right| &< \\ &< \lim_{z \rightarrow 1} \left| (z-1) z^{-T} \sum_{\tau=0}^{\infty} \epsilon z^{-\tau} \right| = \left| \epsilon z^{-T+1} \right| \end{aligned}$$

quindi arbitrariamente piccolo. In conclusione, si ha la tesi.

Osservazione: le ipotesi del teorema del valore finale TD, nel caso in cui si considerino come $f(t)$ delle combinazioni di modi di un sistema lineare, coincidono col chiedere che i modi siano tutti convergenti o al più limitati ma non oscillanti (considera e.g. $f(t) = h(t)$ $[F(z) = \frac{z}{z-1}]$, e $f(t) = \sin \theta t$ $[F(z) = \frac{z \sin \theta}{z^2 - 2z \cos \theta + 1}]$). Nel caso di modi polinomialmente divergenti non oscillanti si ha $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \infty = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} F(z)$ (e.g. $f(t) = C_k^t$ $[F(z) = \frac{z}{(z-1)^{k+1}}]$)

7.2 Soluzione delle equazioni in forma di stato

La applicazione delle trasformate alle equazioni di stato dei sistemi LTI dà luogo a molti e interessanti sviluppi. Per sistemi LTITC,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned}$$

L -trasformando ambo i membri si ha

$$\begin{aligned} s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{aligned}$$

(dove la trasformata di un vettore è inteso come vettore delle trasformate)
da cui

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

e

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(s)$$

Dal confronto di questa equazione con quelle delle soluzioni esplicite già ottenute, si ottiene subito

$$\mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

e

$$\mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} * \mathbf{u}(t)] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

Di particolare interesse è la risposta forzata nell'uscita,

$$\mathbf{Y}_p(s) = \mathcal{L}[\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} * \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)] = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(s) \stackrel{def}{=} \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

nella quale alla $\mathbf{G}(s)$ si dà il nome di *matrice di trasferimento* TC (*funzione di trasf.* nel caso SISO).

Per sistemi LTITD si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t+1) &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

Z -trasformando ambo i membri si ha

$$\begin{aligned} z\mathbf{X}(z) - z\mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}\mathbf{U}(z) \\ \mathbf{Y}(z) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(z) + \mathbf{D}\mathbf{U}(z) \end{aligned}$$

da cui

$$\mathbf{X}(z) = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z)$$

Dal confronto di questa equazione con quelle delle soluzioni esplicite già ottenute, si ottiene subito

$$\mathcal{Z}[\mathbf{A}^t] = z(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$$

e

$$\mathcal{Z}[\mathbf{A}^{t-1} \mathbf{B} * \mathbf{u}(t)] = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{U}(z)$$

Per la risposta forzata nell'uscita vale

$$\mathbf{Y}_p(z) = \mathcal{Z}[\mathbf{C}\mathbf{A}^{t-1} \mathbf{B} * \mathbf{u}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)] = [\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{U}(z) \stackrel{def}{=} \mathbf{G}(z)\mathbf{U}(z)$$

nella quale alla $\mathbf{G}(z)$ si dà il nome di *matrice di trasferimento* TD (*funzione di trasferimento per sistemi SISO*).

7.3 Applicazione alla soluzione di ODE

Riconsideriamo l'equazione differenziale in forma normale

$$D^n y = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i D^i y + \sum_{j=0}^p b_j D^j u, \quad (29)$$

con condizioni iniziali $y(0) = y_0$, $Dy(0) = y_0^{(1)}$, \dots , $D^{n-1}y(0) = y_0^{(n-1)}$, e applichiamo alla equazione differenziale la trasformazione di Laplace. Si ottiene facilmente che la trasformata della risposta forzata è pari a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[D^n y] &= s \mathcal{L}[D^{n-1} y] - y_0^{(n-1)} \\ &= s^2 \mathcal{L}[D^{n-2} y] - s y_0^{(n-2)} - y_0^{(n-1)} \\ &\vdots \\ &= s^n \mathcal{L}[y] - \sum_{\ell=1}^n s^{n-\ell} y_0^{(\ell-1)} \end{aligned}$$

Dette $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$ e $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$, e posto per semplicità $u(0) = Du(0) = \dots = D^{p-1}u(0) = 0$, si ottiene quindi

$$Y(s) = \frac{\sum_{\ell=1}^n s^{(n-\ell)} y_0^{(\ell-1)} + \sum_{i=1}^n a_i \left\{ \sum_{\ell=1}^i s^{(i-\ell)} y_0^{(\ell-1)} \right\}}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} + \frac{\sum_{i=0}^p b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s)$$

dove $a_n = 1$.

Se $U(s)$ è un rapporto di polinomi, anche $Y(s)$ lo è, quindi si può calcolare mediante antitrasformazione.

Analogamente si procede per equazioni lineari alle differenze della forma 29, con condizioni $y(0) = y_0$, $Dy(0) = y(1)$, \dots , $D^{n-1}y(0) = y(n-1)$. Applicando la trasformata Z , e applicando la proprietà di traslazione a sinistra nel tempo discreto, si ottiene

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[D^n y] &= z \mathcal{Z}[D^{n-1} y] - z y(n-1) \\ &= z^2 \mathcal{Z}[D^{n-2} y] - z^2 y(n-1) - z y(n-2) \\ &\vdots \\ &= z^n \mathcal{Z}[y] - \sum_{\ell=0}^{n-1} z^{n-\ell} y(\ell) \end{aligned}$$

Dette $Y(z) = \mathcal{Z}[y(t)]$ e $U(z) = \mathcal{Z}[u(t)]$, si ottiene quindi una equazione algebrica nella incognita $Y(z)$, che può essere risolta calcolando $Y(z)$

$$Y(z) = \frac{- \sum_{i=1}^n a_i \left\{ \sum_{\ell=1}^i z^{(i-\ell)} y(\ell-1) \right\}}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} + \frac{\sum_{i=0}^p b_i z^i}{\sum_{i=0}^n a_i z^i} U(z)$$

dove $a_n = 1$ e si è posto per semplicità $u(0) = u(1) = \dots = u(p-1) = 0$. Se $U(z)$ è un rapporto di polinomi, anche $Y(z)$ lo è, quindi si può calcolare mediante antitrasformazione.

7.4 Funzioni di Trasferimento e Coordinate

Si è visto che per un sistema LTI

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

il rapporto ingresso/uscita forzata è rappresentato dalla funzione (o matrice per sistemi MIMO) di trasferimento

$$\mathbf{G}(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

dove $p \in \mathbb{C}$ rappresenta la opportuna variabile nei casi TC e TD.

Osserviamo esplicitamente che il rapporto ingresso/uscita forzata per un dato sistema è già compiutamente descritto nelle equazioni in forma normale del sistema, in cui non appaiono gli stati. In altri termini, tale rapporto prescinde dalla particolare rappresentazione scelta per gli stati, e ci aspettiamo che sia invariante al cambiare delle coordinate nello spazio di stato.

Infatti, se si usano coordinate $\mathbf{w} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$, il sistema in forma di stato diviene come noto

$$\begin{aligned} D\mathbf{w} &= \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{w} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{T}\mathbf{w} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(p) &= \mathbf{C}\mathbf{T}(s\mathbf{I} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^{-1}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \end{aligned}$$

Si dice che la funzione di trasferimento è un invariante strutturale del sistema.

7.5 Antitrasformazioni

Si dicono antitrasformazioni gli operatori che mappano una funzione complessa (in s o z) in funzioni o successioni nel tempo.

Antitrasformata TC:

$$\mathbf{f}(t) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

con $\sigma > \sigma_*$

Antitrasformata TD:

$$\mathbf{f}(t) = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\Gamma_R} F(z)z^{t-1} dz$$

con Γ_R una circonferenza di raggio $R > \rho_*$.

Queste formule sono di interesse teorico, ma non vengono usate spesso in pratica. Infatti, molto spesso le funzioni complesse di cui si vuole trovare la antitrasformata sono (combinazioni di) trasformate già note. Si consideri in particolare che tutte le trasformate sinora trovate (ad eccezione della traslazione in TC) sono funzioni polinomiali fratte nella variabile complessa, che quindi possiedono un numero finito di singolarità al finito.

Consideriamo, per il TC, in particolare il caso in cui $F(s)$ sia polinomiale fratta, con grado del denominatore superiore o uguale a quello del numeratore:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} =$$

cioè

$$F(s) = b_m \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (s - z_j)^{m_j}}{\prod_{i=1}^h (s - p_i)^{n_i}}$$

dove gli z_j sono gli ℓ zeri distinti di ordine m_j , ed i p_i sono gli h poli distinti di ordine n_i ($\sum_{j=1}^{\ell} m_j = m$, $\sum_{i=1}^h n_i = n$).

Si sviluppi il rapporto in somma di fratti semplici:

$$F(s) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ik}}{(s - p_i)^k} \right\}$$

La antitrasformata è a questo punto immediata, sulla base delle trasformate calcolate in precedenza:

$$f(t) = \alpha_0 \delta(t) + \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_i t} \right\}$$

Nel caso di poli complessi coniugati $p_i = \sigma_i + \mathbf{j}\omega_i$, $p_j = \sigma_i - \mathbf{j}\omega_i$ (supponendo di averli contati con indice i e j), di molteplicità n_i , si otterranno residui $\alpha_{ik} = a_{ik} + \mathbf{j}b_{ik}$, $\alpha_{jk} = a_{ik} - \mathbf{j}b_{ik}$, e quindi

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_{ik}}{(s - p_i)^k} + \frac{\alpha_{jk}}{(s - p_j)^k} = \\ & = \frac{(a_{ik} + \mathbf{j}b_{ik})(s - \sigma - \mathbf{j}\omega)^k + (a_{ik} - \mathbf{j}b_{ik})(s - \sigma + \mathbf{j}\omega)^k}{[(s - \sigma)^2 + \omega^2]^k} \end{aligned}$$

cui corrisponde

$$2 \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!} e^{\sigma t} (a_{ik} \cos(\omega t) + b_{ik} \sin(\omega t))$$

ovvero

$$2 \frac{t^{(k-1)}}{(k-1)!} e^{\sigma t} \sin(\omega t + \phi)$$

dove $\phi = \text{atan2}(a_{ik}, b_{ik})$.

Per il calcolo dei coefficienti α_{ik} , si può ricorrere nei casi più semplici alla uguaglianza dei coefficienti di potenze uguali di s nei due polinomi.

Esempio: $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^2} = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\alpha_{21}}{s+1} + \frac{\alpha_{22}}{(s+1)^2}$. Sviluppando la somma, semplificando la frazione, ed uguagliando i polinomi a numeratore si ha

$$s + 2 = (\alpha_{11} + \alpha_{21})s^2 + (2\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{22})s + \alpha_{11}$$

da cui $\alpha_{11} = 2$, $\alpha_{21} = -2$, e $\alpha_{22} = -1$, da cui si ha immediatamente $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2H(t) - 2e^{-t} - te^{-t}$.

Esempio: $F(s) = \frac{1}{s(s^2+bs+c)}$ con $b^2 - 4c < 0$: conviene riscrivere $F(s) = \frac{1}{s[(s-\sigma)^2+\omega^2]}$, dove $\sigma = -\frac{b}{2}$ e $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{4c-b^2}$. Si ponga $F(s) = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\beta_1(s-\sigma)+\beta_0}{(s-\sigma)^2+\omega^2}$, e si uguagliano i coefficienti delle potenze di s : si ha $\alpha_{11} = \frac{1}{\sigma^2+\omega^2}$, $\beta_1 = -\alpha_{11}$, e $\beta_0 = \sigma\alpha_{11}$, da cui

$$f(t) = \frac{1}{\sigma^2 + \omega^2} \left(H(t) - e^{\sigma t} \cos(\omega t) + \frac{\sigma}{\omega} e^{\sigma t} \sin(\omega t) \right).$$

Un metodo più rapido, di particolare utilità nei casi in cui vi sia un numero elevato di poli, è basato sulle formule di calcolo dei coefficienti:

$$\alpha_{k,n_k-r} = \frac{1}{r!} \left[\frac{d^r}{ds^r} \{F(s)(s-p_k)^{n_k}\} \right]_{s=p_k}$$

(dove $\frac{d^0}{ds^0}G(s) = G(s)$).

La formula è di facile dimostrazione: moltiplicando entrambe i termini della definizione dello sviluppo in fratti semplici per $(s-p_i)^{n_k}$, si ha infatti

$$\begin{aligned} F(s)(s-p_k)^{n_k} &= \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (s-z_j)^{r_j}}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^h (s-p_i)^{n_i}} \\ &= \alpha_0 (s-p_k)^{n_k} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^h \left\{ \sum_{\ell=1}^{n_i} \frac{\alpha_{i\ell} (s-p_k)^{n_k}}{(s-p_i)^\ell} \right\} + \sum_{\ell=1}^{n_k} \alpha_{k\ell} (s-p_k)^{n_k-\ell} \end{aligned}$$

Valutando questa relazione in $s = p_k$ si ottiene direttamente

$$[F(s)(s-p_k)^{n_k}]_{s=p_k} = \alpha_{k,n_k}$$

Derivando poi la stessa relazione rispetto alla variabile complessa si ha

$$\frac{d}{ds} [F(s)(s - p_k)^{n_k}] = \Theta(s - p_k) + \sum_{\ell=1}^{n_k-1} \alpha_{k\ell} (n_k - \ell) (s - p_k)^{n_k-\ell-1}$$

dove $\Theta(s - p_k)$ è una funzione che si annulla per $s = p_k$; quindi la formula data.

I coefficienti di tipo α_{i1} vengono anche detti “residui polari”. Per i residui polari di trasformate del tipo

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + \mathbf{b}_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

con $m < n$, valgono le utili relazioni

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_{i1} &= b_m, & m &= n - 1 \\ \sum_i \alpha_{i1} &= 0, & m &< n - 1 \end{aligned}$$

Per calcolare le Z -antitrasformate di funzioni polinomiali fratte, conviene porre preliminarmente in evidenza un fattore z :

$$F(z) = z \frac{\prod_{j=1}^{\ell} (z - z_j)^{r_j}}{z \prod_{i=1}^h (z - p_i)^{n_i}}$$

per poi sviluppare in fratti semplici

$$F(z) = z \sum_{i=1}^{h+1} \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ik}}{(z - p_i)^k} \right\}$$

dove il polo introdotto in $z = 0$ è trattato come tutti gli altri. La antitrasformata è a questo punto immediata, sulla base delle trasformate calcolate in precedenza:

$$f(t) = \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} C_{(k-1)}^t p_i^{t-k+1} \right\}$$

Esempio TC. $F(s) = \frac{s+2}{s(s+1)^3} = \frac{\alpha_{11}}{s} + \frac{\alpha_{21}}{(s+1)} + \frac{\alpha_{22}}{(s+1)^2} + \frac{\alpha_{23}}{(s+1)^3}$. Si ha $\alpha_{11} = \left[\frac{(s+2)}{(s+1)^3} \right]_{s=0} = 2$; $\alpha_{23} = \left[\frac{(s+2)}{s} \right]_{s=-1} = -1$; $\alpha_{22} = \left[\frac{d}{ds} \frac{(s+2)}{s} \right]_{s=-1} = \left[\frac{-2}{s^2} \right]_{s=-1}$; $\alpha_{21} = \frac{1}{2} \left[\frac{d}{ds} \frac{-2}{s^2} \right]_{s=-1} = \left[\frac{1}{2} \frac{4}{s^3} \right]_{s=-1} = -2$. Più rapidamente, si poteva trovare α_{21} da $\alpha_{11} + \alpha_{21} = 0$.

Esempio TD: $F(z) = \frac{z-1}{z+1} = z \frac{z-1}{z(z+1)}$, ovvero $\frac{1}{z} F(z) = \frac{\alpha_{11}}{z} + \frac{\alpha_{21}}{z+1}$. Si trova $\alpha_{11} = [zF(z)/z]_{z=0} = -1$ e $\alpha_{21} = [(z+1)F(z)/z]_{z=-1} = 2$, da cui $F(z) = -1 + 2 \frac{z}{z+1}$ e $f(t) = -\delta(t) + 2(-1)^t = 1, -2, 2, -2, \dots$

7.6 Antitrasformata Z: i primi campioni

È talvolta particolarmente utile ottenere esplicitamente i primi valori della successione corrispondente ad una data funzione polinomiale fratta $F(z)$, senza ricorrere alla antitrasformata vera e propria. Si possono utilizzare due tecniche:

Tecnica del teorema del valore iniziale e della traslazione a sinistra.

Il primo campione $f(0)$ è ottenuto semplicemente come $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \stackrel{def}{=} F(\infty)$; il secondo campione $f(1)$ non è altro che il primo campione della successione $f_1(t) \stackrel{def}{=} f(t+1)$, quindi $f(1) = \lim_{z \rightarrow \infty} z(F(z) - f(0))$, $f(2) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z^2 F(z) - z^2 f(0) - z f(1))$. Il k -esimo campione è quindi dato da

$$f(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} \left(z^k F(z) - \sum_{t=0}^{k-1} f(t) z^{k-t} \right).$$

Esempio. $F(z) = \frac{z+1}{z^2+z+1}$. Si ottiene $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(3) = -1$, $f(4) = 1$, etc.

Tecnica della divisione continua.

Consiste nell'applicare la divisione di polinomi al polinomio a numeratore della $F(z)$, opportunamente prolungato con le potenze negative di z moltiplicate da coefficienti nulli, diviso il polinomio a denominatore. il risultato ottenuto è un polinomio nelle potenze di z^{-1} , i cui coefficienti sono, per definizione i termini della serie $f(t)$.

Esempio: $F(z) = \frac{z+1}{z^2+z+1}$. Ricordando la regola di divisione dei polinomi si ha

$$\begin{array}{r|l} z + 1z^0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots & (-) \\ z + 1z^0 + 1z^{-1} + 0z^{-2} + \dots & (=) \\ \hline 0 + 0 - 1z^{-1} + 0z^{-2} + \dots & (-) \\ 0 + 0 - 1z^{-1} + 1z^{-2} - z^{-3} & (=) \\ \hline 0 + 0 + 0 + 1z^{-2} + z^{-3} & (-) \end{array} \left| \begin{array}{l} z^2 + z + 1 \\ z^{-1} - z^{-3} + z^{-4} + \dots \end{array} \right.$$

I primi campioni sono quindi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(3) = -1$, $f(4) = 1$, etc.

8 Risposte forzate ad ingressi tipici

8.1 Risposte impulsive

Si consideri la risposta forzata dell'uscita di un sistema LTITC SISO descritto dalle matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ ad un impulso al tempo 0:

$$y(t) = \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\delta(\tau)d\tau + \mathbf{D}\delta(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t)$$

ovvero, \mathcal{L} -trasformando

$$Y(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

La risposta impulsiva è quindi la funzione che corrisponde alla funzione di trasferimento (f.d.t.) attraverso la trasformata di Laplace. In altri termini, se conosco la risposta impulsiva di un sistema, ne posso ricavare la f.d.t. per \mathcal{L} -trasformata, e quindi posso determinare la risposta forzata a qualsiasi altro ingresso.

In modo del tutto analogo per sistemi LTITD: $y(0) = \mathbf{D}$ e, per $t > 0$,

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{C}\mathbf{A}^{(t-\tau-1)}\mathbf{B}\delta(\tau) + \mathbf{D}\delta(t) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{t-1}\mathbf{B}$$

e, \mathcal{Z} -trasformando,

$$Y(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

La risposta impulsiva è quindi la successione che corrisponde alla f.d.t. attraverso la \mathcal{Z} -trasformata. In altri termini, se conosco la risposta impulsiva di un sistema TD, ne posso ricavare la f.d.t. \mathcal{Z} -trasformandola, e quindi posso determinare la risposta forzata a qualsiasi altro ingresso.

8.2 Risposta al gradino

Dalla conoscenza della risposta forzata (da condizioni iniziali rilassate) di un sistema LTI ad ingressi del tipo $u(t) = t^n$ in TC, ovvero $u(t) = C_n^t$ in TD è possibile ricostruire la funzione di trasferimento del sistema, e quindi caratterizzare completamente il sistema dal punto di vista della sua risposta forzata. Infatti si ha nei due casi che la trasformata del segnale di risposta $y(t)$ (eventualmente ricavata numericamente dai dati sperimentali) è pari a

$$\mathcal{L}[y(t)] = G(s) \frac{n!}{s^{n+1}}$$

ovvero a

$$\mathcal{Z}[y(t)] = G(z) \frac{z}{(z-1)^{n+1}}$$

da cui facilmente si ottengono le f.d.t.

Particolarmente interessante è la risposta al gradino unitario (detta anche *risposta indiciale*). Il suo comportamento iniziale e finale si ottiene facilmente applicando i teoremi relativi alle trasformate dei segnali. Per il comportamento a regime, si hanno le formule (dove applicabili)

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s}$$

e

$$y(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} G(z) \frac{z}{z-1}$$

Se il sistema TC è asintoticamente stabile, $y(\infty) = G(0)$. Se il sistema TC ha un polo nell'origine, si ottiene $y(\infty) = \infty$. Supponiamo che il sistema abbia m poli nell'origine, e che quindi si possa scrivere

$$G(s) = \frac{1}{s^m} \hat{G}(s)$$

dove $\hat{G}(0) \neq \infty$. Applicando iterativamente il teorema di trasformazione delle derivate alla risposta indiciale, si ottiene

$$\mathcal{L}[y^{(p)}(t)] = \frac{s^p}{s^m} \hat{G}(s) \frac{1}{s} - \sum_{k=0}^{p-1} s^k y^{(p-k-1)}(0)$$

dalla quale direttamente si osserva che le funzioni $y(t)$, $y^{(1)}(t)$, \dots , $y^{(m-1)}(t)$ sono infiniti per $t \rightarrow \infty$; mentre si ha che $y^{(m)}(\infty) = \hat{G}(0)$. I sistemi di questo tipo (con m poli nell'origine) vengono detti sistemi di **tipo "m"**.

Se il sistema TD è asintoticamente stabile, $y(\infty) = G(1)$. Se il sistema TD ha un polo unitario, si ottiene $y(\infty) = \infty$. Supponiamo che il sistema abbia m poli unitari, e che quindi si possa scrivere

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^m} \hat{G}(z)$$

dove $\hat{G}(1) \neq \infty$. Definiamo la *differenza finita di ordine p* di una successione $y(t)$ ricorsivamente come

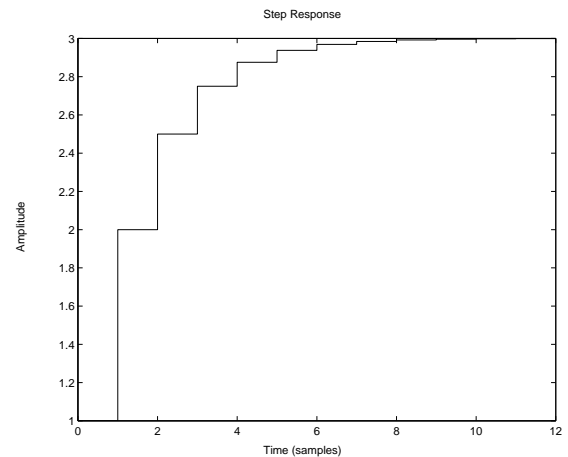
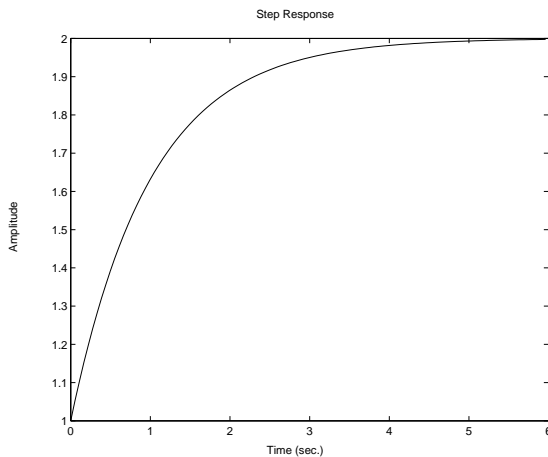
$$\begin{aligned} y^{(0)}(t) &= y(t) \\ y^{(1)}(t) &= y(t) - y(t-1) \\ y^{(2)}(t) &= y^{(1)}(t) - y^{(1)}(t-1) = y(t) - 2y(t-1) + y(t-2) \\ &\vdots \\ y^{(p)}(t) &= y^{(p-1)}(t) - y^{(p-1)}(t-1) = \sum_{i=0}^p (-1)^i C_i^p y(t-i) \end{aligned}$$

Applicando iterativamente il teorema di traslazione nel tempo alla risposta indiciale, si ottiene per le trasformate delle differenze finite

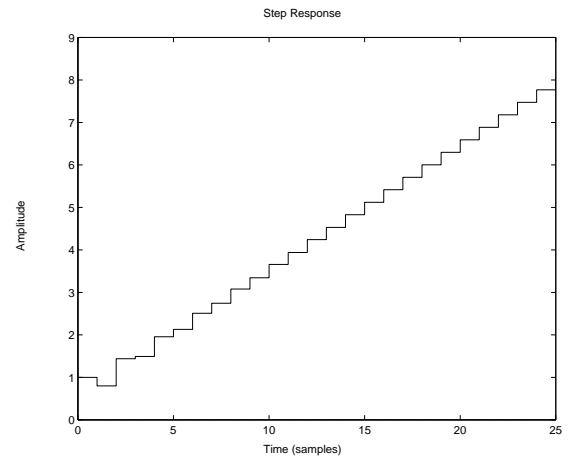
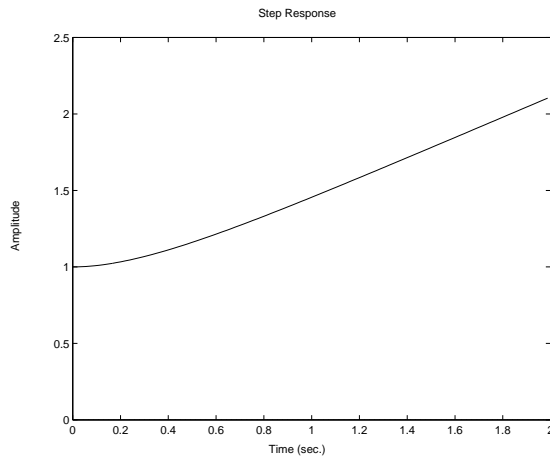
$$\mathcal{Z} [y^{(p)}(t)] = \frac{(z-1)^p}{(z-1)^m} \hat{G}(z) \frac{z}{z-1}$$

dalla quale direttamente si osserva che le differenze finite $y^{(0)}(t), y^{(1)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t)$ tendono a infinito per $t \rightarrow \infty$; mentre si ha che $y^{(m)}(\infty) = \hat{G}(1)$. I sistemi di questo tipo (con m poli unitari) vengono detti sistemi di **tipo "m"**.

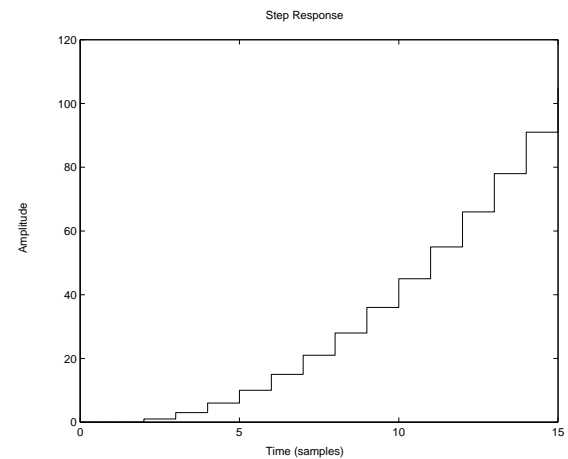
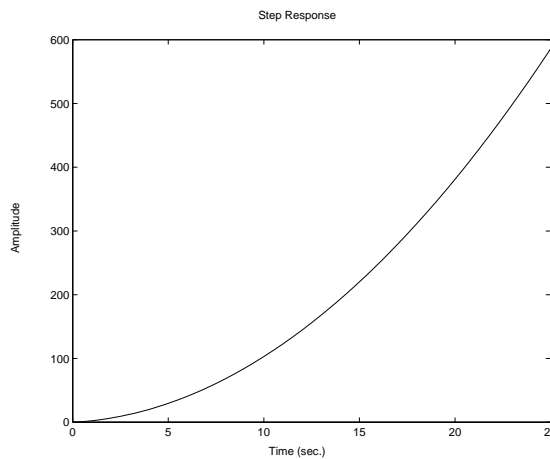
Esempi: La risposta indiciale dei sistemi di tipo "0" $G(s) = \frac{s+2}{s+1}$ e $G(z) = \frac{z+0.5}{z-0.5}$ si porta ad un regime costante pari a 2 e 3, rispettivamente.



La risposta indiciale dei sistemi di tipo "1" $G(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{s(s+3)}$, $G(z) = \frac{z(z-0.5)}{(z-1)(z+0.7)}$ diverge, con pendenza pari a $\arctan(\hat{G}(0)) \approx 0.6rad$ e $\arctan \hat{G}(1) \approx 0.3rad$, rispettivamente.



La risposta indiciale del sistema di tipo “2” $G(s) = \frac{(s+7)(s+1)}{s^2(s+4)}$ diverge con pendenza sempre crescente, ma con derivata seconda che tende a $\hat{G}(0) = 7/4$. La risposta di $G(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ ha differenza finita del secondo ordine pari a $\hat{G}(1) = 1$



Per il comportamento al tempo iniziale delle risposte indiciali, si hanno le formule

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) \frac{1}{s}$$

e

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} G(z) \frac{z}{z-1}$$

La natura di questi limiti è dettata dalla differenza tra il grado del denominatore e quello del numeratore delle f.d.t., differenza che si definisce *eccesso poli-zeri* (si dicono zeri di una f.d.t. i valori della variabile complessa che la

annullano, cioè le radici del numeratore nel caso di una f.d.t. polinomiale fratta).

In TD, per un sistema proprio ma non strettamente si ha che

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) \frac{1}{s} = G(\infty)$$

con $0 < G(\infty) < \infty$. Se invece l'eccesso poli-zeri è pari a $n - m$, applicando ancora il teorema della trasformazione delle derivate alla risposta indiciale, si ottiene facilmente che $y(0) = y^{(1)}(0) = \dots = y^{(n-m-1)}(0) = 0$, e la prima derivata non nulla (e finita) è la $n-m$ -esima.

In TD, per un sistema proprio ma non strettamente, si ha che

$$y(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z-1}{z} G(z) \frac{z}{z-1} = G(\infty)$$

con $0 < G(\infty) < \infty$. Se l'eccesso poli-zeri è pari a $n - m$, applicando ancora il teorema della traslazione a sinistra alla risposta indiciale, si ottiene facilmente che $y(0) = y(1) = \dots = y(n - m - 1) = 0$, e il primo campione non nullo è l' $n-m$ -esimo.

Consideriamo un sistema asintoticamente stabile, con eccesso poli-zeri pari ad uno, con tutti gli zeri a parte reale negativa, eccetto uno che è positivo:

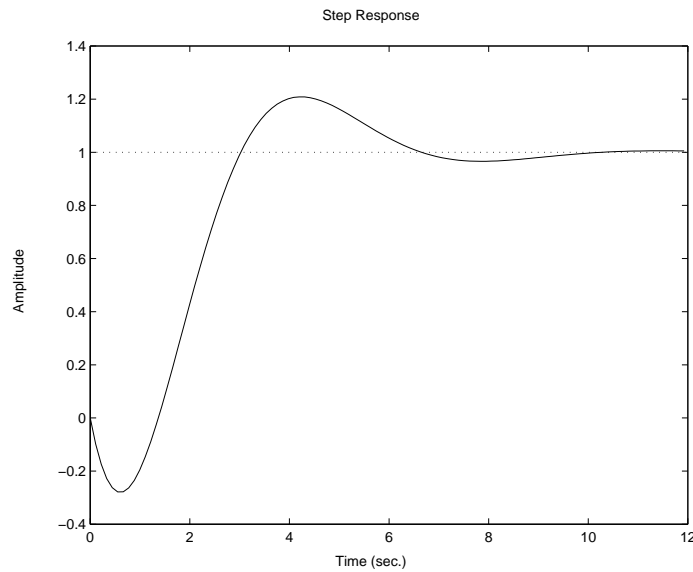
$$\mathbf{G}(s) = K(s + z_1) \frac{\prod_{i=2}^{n-1} (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}, \quad \Re(z_i) < 0, \Re(p_j) < 0, \forall i, j$$

La risposta indiciale in questo caso presenta $y(0) = 0$, $y^{(1)}(0) = K$ e

$$y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = K z_1 \frac{\prod_{i=2}^{n-1} -z_i}{\prod_{j=1}^n -p_j}$$

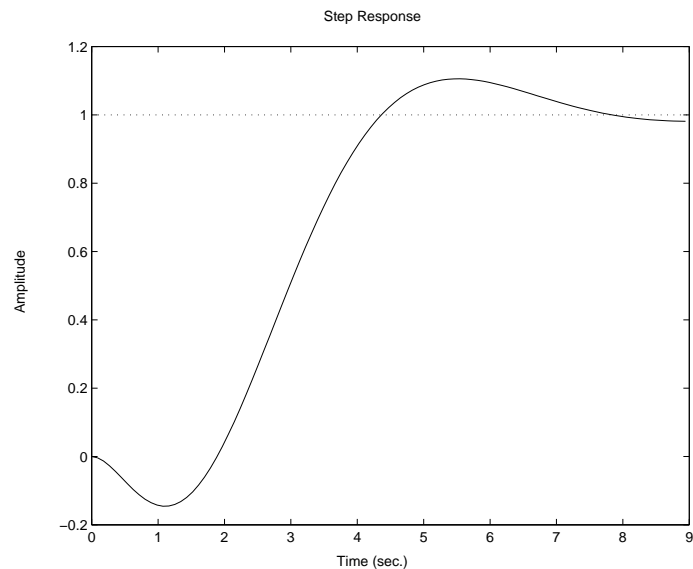
ed essendo le produttorie a secondo membro tutte positive, si ha che il segno di $y^{(1)}(0)$ e di $y(\infty)$ sono opposti.

Esempio: $G(s) = -\frac{s-1}{s^2+s+1}$.



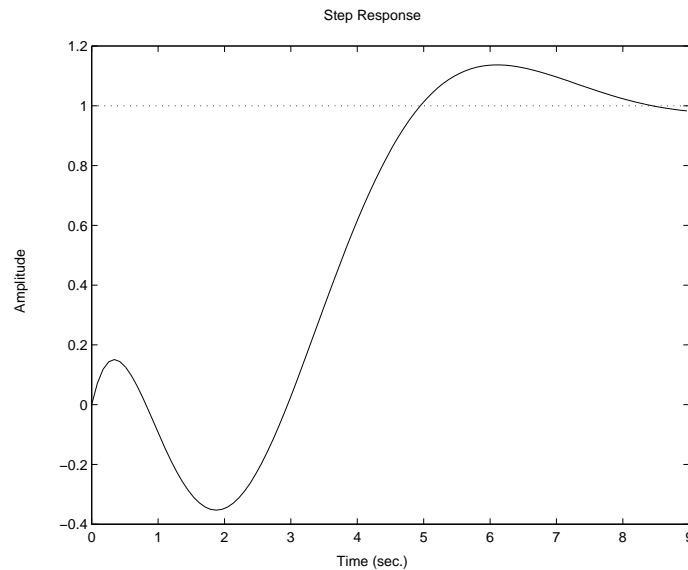
Se l'eccesso poli-zeri è superiore, si avrà comunque che la prima derivata non nulla in 0 è di segno opposto a quello del valore di regime. **Esempio:**

$$G(s) = -\frac{s-1}{(s^2+s+1)(s+1)}.$$

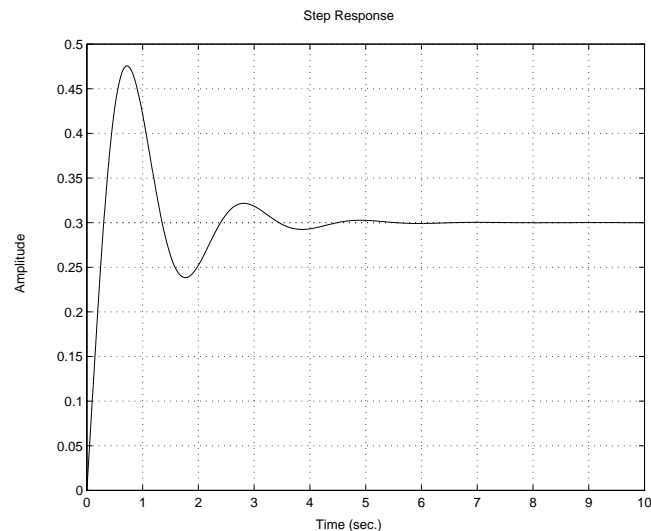


Se infine vi sono più zeri a parte reale positiva, anche se la prima derivata non nulla può avere lo stesso segno del valore a regime, vi saranno comunque oscillazioni in senso opposto a quello di regime. **Esempio:** $G(s) =$

$$-\frac{(s-1)^2}{(s^2+s+1)(s+1)}.$$



Dall'andamento della risposta indiciale si possono trarre facilmente alcune informazioni sulla struttura del sistema. Ad esempio, osservando la risposta



si trova una oscillazione di periodo $T \approx 2$, quindi deduco che in $G(s)$ compariranno due poli complessi coniugati con parte immaginaria $\frac{2\pi}{T} \approx 3$. La parte reale dei poli si può stimare osservando la velocità di smorzamento della oscillazione. Si consideri ad esempio una curva esponenziale $e^{\sigma t}$ che coincida, agli estremi di un periodo di oscillazione, con i massimi o minimi locali della risposta (si deve scegliere un periodo quanto possibile avanzato nel tempo, in modo che l'effetto degli altri modi esponenziali presenti nella risposta sia decresciuto sufficientemente). Si può calcolare σ a partire dai

valori dei picchi $y(t_o)$ e $y(t_o + T)$ facendo il logaritmo del rapporto (depurato del valore di regime)

$$\log \frac{e^{\sigma(t_o+T)}}{e^{\sigma t_o}} = \log \frac{y(t_o + T) - y(\infty)}{y(t_o) - y(\infty)}$$

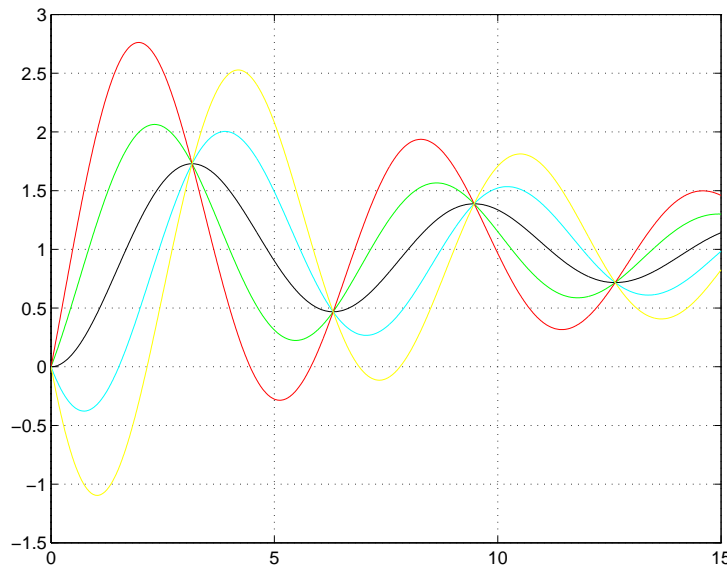
da cui nel nostro esempio (usando i minimi in $y(1.7) \approx 0.24$, $y(3.7) \approx 0.29$, $y(\infty) = 0.3$) si ottiene $\sigma \approx -0.9$.

L'effetto della posizione degli zeri di una f.d.t. SISO può essere illustrato graficamente osservando la risposta al gradino di un sistema $G(s) = (\tau s + 1)G_0(s)$ al variare di τ .

Ad esempio, per il sistema

$$G(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha^{-2}s^2 + 0.2\alpha^{-1}s + 1}$$

con $\tau = -2$, $\tau = -1$, $\tau = 0$, $\tau = 1$, $\tau = 2$, si hanno le risposte sotto illustrate ($\alpha = 1$, tratto continuo nero per $\tau = 0$).



Detta $y_0(s) = G_0(s)/s$ la trasformata della risposta del sistema con $\tau = 0$, la risposta negli altri casi è data da $y_\tau(s) = y_0(s) + \tau s y_0(s)$, quindi consiste della risposta del sistema senza lo zero sommata alla sua derivata moltiplicata per τ . Nell'esempio di cui sopra la risposta $y_0(t)$ è quella di un sistema del secondo ordine con fattore di smorzamento 0.1. Le curve $y_\tau(t)$ si intersecano quindi tutte per i punti di massimo e di minimo della risposta $y_0(t)$, e si discostano da quella tanto di più quanto maggiore è la pendenza.

Le curve hanno massimi locali per $\dot{y}(t) = -\tau\ddot{y}(t)$, quindi per τ positivo il primo picco è anticipato, mentre per τ negativo si ha un picco rovesciato, ed un picco positivo è raggiunto in ritardo rispetto al sistema senza zeri. Si riconosce nel primo comportamento l'effetto anticipativo dei poli a parte reale negativa che si riscontra usualmente nei diagrammi delle fasi di Bode; e l'effetto di inversione iniziale della risposta, e di ritardo, noto per i sistemi con zeri a parte reale positiva.

8.3 Risposte al gradino di sistemi del primo e secondo ordine

Nella risposta al gradino di un sistema si sommano i contributi dei diversi modi del sistema stesso. Qualora i modi siano tutti convergenti, e ve ne siano alcuni che convergono assai più rapidamente di altri, l'effetto di questi modi veloci sulla risposta di questi ultimi “domina” quello dei primi, che sono quindi spesso trascurabili in prima approssimazione. La dominanza di alcuni modi su altri corrisponde con la posizione degli autovalori corrispondenti ai primi molto più in prossimità dell'asse immaginario (in TC), o del cerchio unitario (in TD), rispetto agli autovalori dei secondi.

Lo scopo ultimo del controllo dei sistemi è molto spesso quello di operare su un sistema inizialmente dato con ingressi opportuni (tipicamente, in retroazione) tali da modificare il sistema stesso e renderlo aderente a specifiche di comportamento dinamico. La più comune di tali specifiche è quella di stabilità asintotica. Possiamo quindi pensare che un sistema, dopo l'opportuno intervento del sistema di controllo, sia asintoticamente stabile. Inoltre, si verifica molto spesso che il sistema controllato, anche se di ordine elevato, abbia uno o due modi che dominano il suo comportamento dinamico.

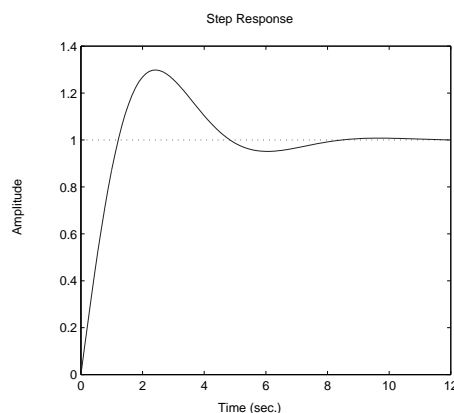
È quindi interessante studiare in dettaglio la risposta al gradino di sistemi del primo e del secondo ordine, che possiamo immaginare come approssimazioni di sistemi con uno o due poli dominanti, perchè spesso in termini di tali risposte verranno date le specifiche di comportamento dinamico del sistema controllato.

8.4 Risposta al gradino di sistemi del primo ordine

Un sistema del primo ordine è caratterizzato da una funzione di trasferimento che, a meno di un fattore costante, ha la seguente forma:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

tempo	% del valore di regime
τ	63.2 %
2τ	86.5 %
3τ	95.0 %
5τ	99.3 %
7τ	99.91 %



La costante τ ha le dimensioni di un *tempo* e caratterizza il comportamento dinamico del sistema.

La risposta al gradino di un sistema del primo ordine é data da:

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(1 + \tau s)} \right\} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La seguente tabella mostra l'andamento nel tempo della risposta al gradino.

Si definisce *Tempo di assestamento* T_a il tempo occorrente affinché l'uscita rimanga entro il ± 5 % del valore finale.

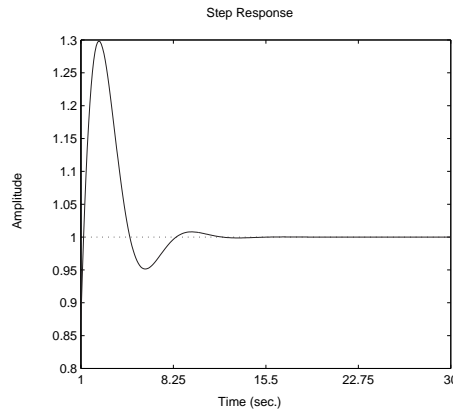
Per un sistema del primo ordine, $T_a = 3\tau$.

8.5 Risposta al gradino di sistemi del secondo ordine

Un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati $p = \alpha \pm j\beta$ é caratterizzato da una funzione di trasferimento che, a meno di un fattore costante, ha la seguente forma:

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

dove $\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ si chiama *pulsazione naturale* e $\delta = -\frac{\alpha}{\omega_n}$ si chiama *coefficiente di smorzamento* ($-1 < \delta < 1$).



Si noti che vale $\beta = \omega_n = \sqrt{1 - \delta^2}$.

La risposta al gradino di un sistema del secondo ordine é data da:

$$y(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s(1 + 2\delta\omega_n s + \frac{s^2}{\omega_n^2})} \right\} = 1 - Ae^{-\delta\omega_n t} \text{sen}(\beta t + \phi)$$

dove

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \delta^2}}$$

$$\phi = \arctan \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} = \arccos \delta$$

I parametri piú importanti sui quali si puó basare una misura della qualità del transitorio sono:

Massima sovraelongazione S: differenza fra il valore massimo raggiunto ed il valore finale (normalmente espressa in % del valore finale).

Tempo di ritardo T_r : tempo per raggiungere il 50 % del valore finale.

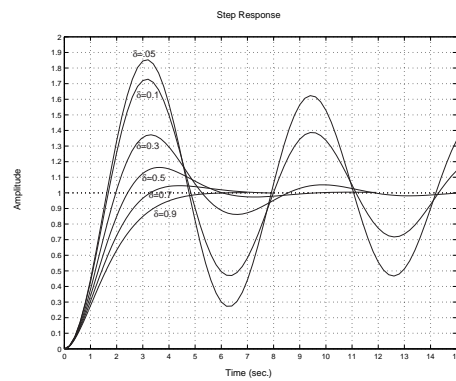
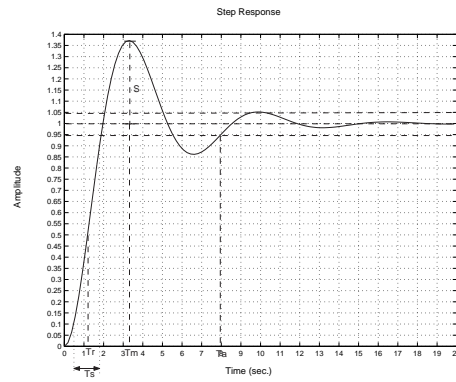
Tempo di salita T_s : tempo occorrente affinché l'uscita passi dal 10 al 90 % del valore finale.

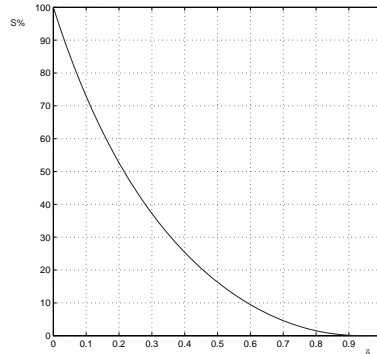
Tempo di assestamento T_a : già definito per i sistemi del primo ordine come il tempo occorrente affinché l'uscita rimanga entro il ± 5 % del valore finale.

Istante di massima sovraelongazione T_m : tempo al quale si presenta la massima sovraelongazione.

Si può ricavare la relazione esatta fra il coefficiente di smorzamento δ e la massima sovraelongazione S , imponendo:

$$\frac{dy}{dt} = 0$$





$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -Ae^{-\delta\omega_n t} \beta \cos(\beta t + \phi) + A\delta\omega_n e^{-\delta\omega_n t} \sin(\beta t + \phi) \\ -\omega_n \sqrt{1 - \delta^2} \cos(\beta t + \phi) + \delta\omega_n \sin(\beta t + \phi) &= 0 \\ \tan(\beta t + \phi) &= \frac{\sqrt{1 - \delta^2}}{\delta} \end{aligned}$$

Poiché $\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$, deve valere

$$\beta t = n\pi \quad (n = 0, 1, \dots)$$

da cui si ottengono i punti di massimo e di minimo:

$$t = \frac{n\pi}{\beta} = \frac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \delta^2}}$$

Sostituendo i valori di tempo di cui sopra, si ottengono i valori massimi e minimi:

$$y_{max/min} = 1 - \frac{e^{-\frac{n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}} \sin(n\pi + \phi) = 1 - (-1)^n e^{-\frac{n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

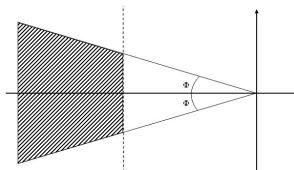
$$S = 100(y_{max} - 1) = 100e^{-\frac{n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

In un sistema del secondo ordine la massima sovralongazione è funzione solo del coefficiente di smorzamento.

Se S non deve superare una certa soglia, i poli del sistema devono essere compresi nel settore delimitato da due semirette che partono dall'origine (r e r' in figura).

Spesso si specifica anche il valore massimo del tempo di assestamento T_a . Si può ricavare anche un limite superiore per T_a dalla relazione:

$$e^{-\delta\omega_n T_a} \leq 0.05 \implies \delta\omega_n T_a \geq 3$$



Affinché il tempo di assestamento sia non superiore al valore assegnato T_a , deve valere

$$\delta\omega_n \geq \frac{3}{T_a}$$

Essendo $\delta\omega_n$ uguale all'opposto della parte reale dei poli, imporre quanto sopra equivale ad imporre che i poli stiano a sinistra di una retta verticale.

8.6 Risposte a segnali permanenti

Si è visto che sia nel caso di equazioni in forma normale TC

$$D^n y = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) D^i y + \sum_{j=0}^p b_j(t) D^j u,$$

la trasformata della risposta forzata è data da

$$Y(s) = \frac{P_0(s)}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} + \frac{\sum_{i=0}^p b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} U(s)$$

dove $P_0(s)$ è un polinomio (di grado al più $n-1$), nullo per condizioni iniziali nulle. La prima frazione rappresenta quindi l'evoluzione libera dell'uscita. La funzione polinomiale fratta che moltiplica l'ingresso è detta anch'essa funzione di trasferimento del sistema (si dirà matrice di trasferimento nel caso MIMO).

È importante notare che i denominatori di entrambe le funzioni polinomiali fratte che appaiono nella risposta libera e forzata condividono n radici (naturalmente, nella risposta forzata appariranno anche i poli della trasformata dell'ingresso $U(s)$). Il sistema è asintoticamente stabile (nel senso di Lyapunov, con ingressi nulli) se i poli della risposta libera sono tutti a parte reale negativa.

Analogamente, per un sistema in forma di stato, si aveva

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{x}(0) + \left[\mathbf{C} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] \mathbf{U}(s)$$

che può essere riscritta, secondo la definizione di inversa di una matrice,

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{x}(0)}{\pi_A(s)} + \frac{\mathbf{C} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D} \pi_A(s)}{\pi_A(s)} \mathbf{U}(s)$$

dove $\pi_A(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ è il polinomio caratteristico di \mathbf{A} , e $\operatorname{adj}(M)$ indica l'aggiunta di M (il cui elemento (i, j) è il minore ottenuto da M sopprimendo la i -esima colonna e la j -esima riga, col segno $(-1)^{(i+j)}$). Il polinomio a numeratore del primo addendo ha quindi grado al più $n-1$, e si annulla per condizioni iniziali nulle. La funzione di trasferimento (cioè la funzione polinomiale fratta che moltiplica la trasformata dell'ingresso nel secondo addendo) ha numeratore di grado n se $\mathbf{D} \neq 0$ ovvero al più $n-1$. Le trasformate della evoluzione libera e di quella forzata condividono gli n poli, che sono evidentemente gli autovalori di \mathbf{A} ; ovviamente, l'evoluzione forzata presenta anche i poli relativi alla trasformata dell'ingresso $U(s)$.

Si noti che i polinomi a numeratore e denominatore della f.d.t. possono avere radici comuni; in questo caso, i fattori monomiali corrispondenti possono essere semplificati, diminuendo il grado di entrambe. Nel caso generale,

quindi, i poli della f.d.t. sono solo un sottoinsieme degli autovalori della matrice \mathbf{A} .

Argomenti perfettamente analoghi possono essere svolti nel caso TD, con la ovvia sostituzione di z per s etc..

Consideriamo ora il caso di un sistema con condizioni iniziali nulle (ovvero “inizialmente rilassato”). Questo caso, che può apparire raro in pratica, è particolarmente interessante in relazione al fatto che, per sistemi asintoticamente stabili, la risposta libera è in ogni caso esponenzialmente convergente a zero, ed è quindi trascurabile per tempi sufficientemente lunghi. Ci chiediamo in particolare quale è la risposta nell’uscita di un sistema (SISO e strettamente proprio per semplicità) inizialmente rilassato sottoposto ad ingresso esponenziale $u(t) = e^{\lambda t}$, al variare di λ . Si ha immediatamente

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{n(s)}{\pi(s)} \frac{1}{s - \lambda}$$

che, se p_1, \dots, p_n sono i poli di $G(s)$, e $p_i \neq \lambda$, può essere sviluppata in fratti semplici

$$Y(s) = \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ik}}{(s - p_i)^k} \right\} + \frac{\beta}{s - \lambda}$$

Il calcolo dei coefficienti può essere fatto agevolmente secondo le regole viste; in particolare, si avrà

$$\beta = \left[(s - \lambda)G(s) \frac{1}{s - \lambda} \right]_{s=\lambda} = G(\lambda)$$

La antitrasformata è quindi

$$y(t) = \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_i t} \right\} + G(\lambda) e^{\lambda t} \quad (30)$$

La risposta forzata è dunque data dalla somma di termini composti dai modi del sistema, e da un termine proporzionale all’ingresso. Nel caso che il sistema sia asintoticamente stabile, tutti i modi sono convergenti a zero, quindi trascurabili per tempi sufficientemente lunghi. Si parla in questo caso, per la sommatoria che appare a sinistra in 30, di *termine transitorio* della risposta forzata.

Per ingressi di tipo $u(t) = \hat{u}e^{\lambda t}$ non convergenti a zero (cioè con $\Re(\lambda) \geq 0$, detti anche permanenti, applicati a sistemi asintoticamente stabili, si ha dunque che la risposta forzata (anche in presenza di condizioni iniziali non nulle), per tempi sufficientemente lunghi vale

$$y(t) \approx y_r(t) = G(\lambda)u(t).$$

Questo comportamento nel lungo termine viene detto *termine permanente* dell'uscita (o *risposta a regime*). Il comportamento a regime delle uscite è particolarmente importante in pratica perché è una delle misure più facilmente ottenute dai sistemi fisici il cui modello debba essere stabilito sperimentalmente.

Nel caso $u(t) = H(t)$, la risposta a regime di un sistema asintoticamente stabile TC è

$$y_r(t) = G(0)$$

ed il valore $G(0)$ viene detto *guadagno statico* del sistema. Questo risultato si poteva ottenere anche semplicemente applicando il teorema del valore finale: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = G(0)$.

Il concetto di risposta a regime è particolarmente importante nel caso di ingressi sinusoidali a sistemi asintoticamente stabili. Per $u(t) = \sin(\omega t)$ si ha infatti, per la sovrapposizione degli effetti,

$$y_r(t) = \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(G(\mathbf{j}\omega)e^{\mathbf{j}\omega t} - G(-\mathbf{j}\omega)e^{-\mathbf{j}\omega t} \right).$$

Osservando che, essendo $G(s)$ una funzione polinomiale fratta a coefficienti reali, $G(a^H) = G^H(a)$ (dove a^H indica il coniugato di a) e in particolare se $G(\mathbf{j}\omega) = R_G(\omega) + \mathbf{j}I_G(\omega)$, $G(-\mathbf{j}\omega) = R_G(\omega) - \mathbf{j}I_G(\omega)$, si ha

$$\begin{aligned} y_r(t) &= \frac{1}{2\mathbf{j}} \left[R_G(\omega)(e^{\mathbf{j}\omega t} - e^{-\mathbf{j}\omega t}) + I_G(\omega)\mathbf{j}(e^{\mathbf{j}\omega t} + e^{-\mathbf{j}\omega t}) \right] = \\ &= R_G(\omega) \sin(\omega t) + I_G(\omega) \cos(\omega t), \end{aligned}$$

ovvero ancora, posto $G(\mathbf{j}\omega) = M(\omega)e^{\mathbf{j}\phi(\omega)}$, con $M(\omega) = |G(\mathbf{j}\omega)| = \sqrt{R_G^2(\omega) + I_G^2(\omega)}$ e $\phi(\omega) = \arg G(\mathbf{j}\omega) = \arctan\left(\frac{I_G}{R_G}\right)$,

$$y_r(t) = M \cos(\phi) \sin(\omega t) + M \sin(\phi) \cos(\omega t) = M \sin(\omega t + \phi).$$

Quest'ultima relazione rappresenta un notevole risultato talvolta descritto come **Teorema della risposta armonica**:

La risposta a regime di un sistema asintoticamente stabile ad un ingresso sinusoidale $\sin(\omega t)$ è una sinusoide della stessa frequenza, con ampiezza pari al modulo della f.d.t. in $s = \mathbf{j}\omega$, e ritardata in fase di un angolo pari all'argomento della f.d.t. in $s = \mathbf{j}\omega$.

La funzione complessa di variabile reale $G(s = \mathbf{j}\omega)$, valutata per $0 \leq \omega \leq \infty$, è detta *funzione di risposta armonica* del sistema la cui f.d.t. è $G(s)$.

Nel caso di sistema MIMO, le stesse relazioni valgono per ogni elemento della matrice di trasferimento, considerando quindi che $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{j}\omega)$ caratterizza,

col suo modulo ed il suo argomento, la risposta armonica dell'uscita i -esima corrispondente ad un ingresso sinusoidale sull'ingresso j -esimo.

La conoscenza della risposta armonica di un sistema LTITC (ottenuta ad esempio sperimentalmente applicando una serie di ingressi sinusoidali di frequenza variabile, e misurando la ampiezza e la fase del segnale di uscita a regime) consente la caratterizzazione completa del sistema dal punto di vista ingresso-uscita (cioè di sapere la risposta del sistema per qualsiasi ingresso), purché il sistema sia asintoticamente stabile (come d'altronde implicito nell'uso del concetto di risposta armonica). Infatti, si può in tal caso applicare la definizione di antitrasformata di Laplace, calcolando esplicitamente per $\sigma = 0$

$$\mathcal{L}^{-1} [G(s)] = \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\sigma+\mathbf{j}\infty}^{\sigma-\mathbf{j}\infty} G(s)e^{st} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{j}\omega)e^{\mathbf{j}\omega t} d\omega$$

ottendo quindi la risposta impulsiva $g(t)$, che, a sua volta \mathcal{L} -trasformata, fornisce $G(s)$.

La risposta di un sistema TD inizialmente rilassato sottoposto ad ingresso esponenziale $u(t) = \lambda^t$ è

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{n(z)}{\pi(z)} \frac{z}{z - \lambda}$$

Se p_1, \dots, p_n sono i poli di $G(z)$, e $p_i \neq \lambda$, si ha

$$Y(z) = \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \frac{\alpha_{ik} z}{(z - p_i)^k} \right\} + \frac{\beta z}{z - \lambda}$$

con

$$\beta = \left[(z - \lambda) \frac{\mathbf{G}(z)}{z} \frac{z}{z - \lambda} \right]_{z=\lambda} = G(\lambda)$$

La antitrasformata è quindi

$$y(t) = \sum_{i=1}^h \left\{ \sum_{k=1}^{n_i} \alpha_{ik} C_{k-1}^t p_i^{t-k+1} \right\} + G(\lambda) \lambda^t$$

Per ingressi permanenti di tipo $u(t) = \hat{u} \lambda^t$ non convergenti a zero (cioè con $|\lambda| \geq 1$) applicati a sistemi asintoticamente stabili, la risposta a regime vale

$$y(t) \approx y_r(t) = G(\lambda)u(t).$$

Per $u(t) = H(t)$, la risposta a regime di un sistema asintoticamente stabile TD è

$$y_r(t) = G(1)$$

ed il valore $G(1)$ viene detto *guadagno statico* del sistema. Questo risultato si poteva ottenere anche semplicemente applicando il teorema del valore finale: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} G(z) \frac{z}{z-1} = G(1)$.

Per $u(t) = \sin(\theta t)$ si ha

$$y_r(t) = \frac{1}{2\mathbf{j}} \left(G(e^{\mathbf{j}\theta}) e^{\mathbf{j}\theta t} - G(e^{-\mathbf{j}\theta}) e^{-\mathbf{j}\theta t} \right).$$

Ancora una volta, essendo $G(z)$ una funzione polinomiale fratta a coefficienti reali, si ha che $G(e^{\mathbf{j}\theta}) = R_G(\theta) + \mathbf{j}I_G(\theta)$, $G(e^{-\mathbf{j}\theta}) = R_G(\theta) - \mathbf{j}I_G(\theta)$, e

$$y_r(t) = R_G \sin(\theta t) + I_G \cos(\theta t),$$

ovvero ancora, posto $G(e^{\mathbf{j}\theta}) = M(\theta) e^{\mathbf{j}\phi(\theta)}$, con $M(\theta) = |G(e^{\mathbf{j}\theta})| = \sqrt{R_G^2 + I_G^2}$ e $\phi(\theta) = \arg G(e^{\mathbf{j}\theta}) = \arctan(\frac{I_G}{R_G})$,

$$\begin{aligned} y_r(t) &= M(\theta) \cos(\phi(\theta)) \sin(\theta t) + M(\theta) \sin(\phi(\theta)) \cos(\theta t) = \\ &= M(\theta) \sin(\theta t + \phi(\theta)). \end{aligned}$$

che esprime il teorema della risposta armonica per sistemi TD asintoticamente stabili. La funzione complessa di variabile reale $G(z = e^{\mathbf{j}\theta})$, prende il nome di risposta armonica TD.

A differenza che nel caso TC, in TD la funzione $G(e^{\mathbf{j}\theta})$ (e quindi ovviamente $M(\theta)$ e $\phi(\theta)$) sono periodiche con periodo 2π . Questo significa che due ingressi $u_1(t) = \sin(\theta t)$ e $u_2(t) = \sin((2\pi + \theta)t)$ danno luogo, se applicati ad un sistema LTITD asintoticamente stabile, ad uscite di pari ampiezza e fase (i segnali di ingresso sono in effetti uguali!).

Inoltre, poiché $e^{-\mathbf{j}\theta}$ è il complesso coniugato di $e^{\mathbf{j}\theta}$, e quindi è possibile esprimere $e^{\mathbf{j}(\theta+\pi)} = e^{\mathbf{j}(\theta-\pi)}$ come il coniugato di $e^{\mathbf{j}(\pi-\theta)}$, il valore di $G(e^{\mathbf{j}\theta_1})$ per $\pi < \theta_1 < 2\pi$ si può ottenere da $G^H(e^{2\pi-\theta_1})$. Ogni valore di $G(e^{\mathbf{j}\theta})$ può essere dunque dedotto dalla conoscenza della risposta armonica limitata all'intervallo $0 \leq \theta \leq \pi$.

La conoscenza della risposta armonica di un sistema LTITD (ottenuta ad esempio sperimentalmente) consente la caratterizzazione completa del sistema dal punto di vista ingresso-uscita, purché il sistema sia asintoticamente stabile. Infatti, si può in tal caso applicare la definizione di antitrasformata Z , calcolando esplicitamente

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1} [G(z)] &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_{\Gamma_1} G(z) z^{t-1} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi\mathbf{j}} \int_0^{2\pi} G(e^{\mathbf{j}\theta}) (e^{\mathbf{j}\theta})^{t-1} e^{\mathbf{j}\theta} \mathbf{j} d\theta = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(e^{j\theta})(e^{j\theta})^t d\theta$$

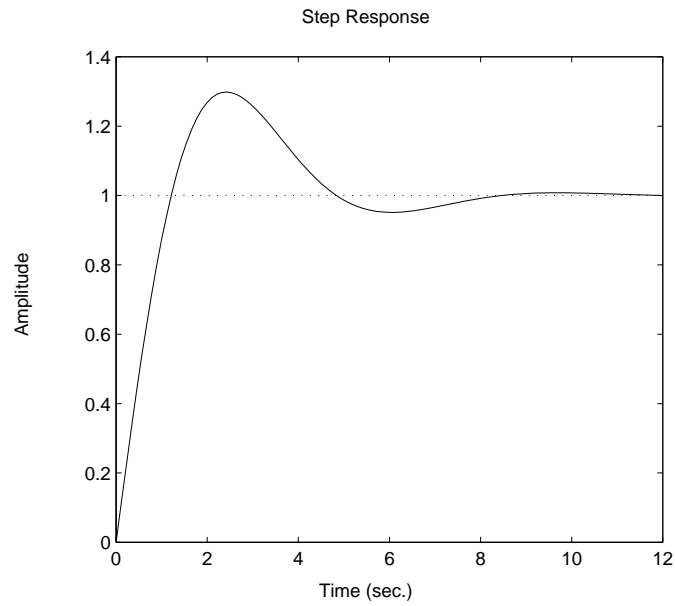
ottenendo quindi la risposta impulsiva $g(t)$, che, a sua volta \mathcal{Z} -trasformata, fornisce $G(z)$.

8.7 Risposte dei sistemi lineari con Matlab

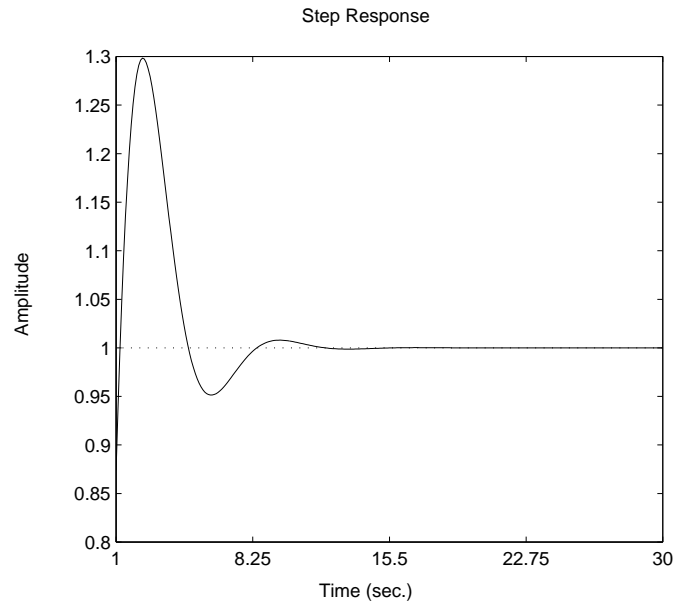
```
% Risposta al gradino  
>>help step
```

STEP Step response of continuous-time linear systems.
STEP(A,B,C,D,IU) plots the time response of the linear system: $\dot{x} = Ax + Bu$
 $y = Cx + Du$ to a step applied to the input IU. The time vector is auto-
matically determined. STEP(A,B,C,D,IU,T) allows the specification of a regularly spaced
time vector T. [Y,X] = STEP(A,B,C,D,IU,T) or [Y,X,T] = STEP(A,B,C,D,IU)
returns the output and state time response in the matrices Y and X respectively.
No plot is drawn on the screen. The matrix Y has as many columns as there
are outputs, and LENGTH(T) rows. The matrix X has as many columns as
there are states. If the time vector is not specified, then the automatically de-
termined time vector is returned in T. [Y,X] = STEP(NUM,DEN,T) or [Y,X,T]
= STEP(NUM,DEN) calculates the step response from the transfer function de-
scription $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$ where NUM and DEN contain the polynomial
coefficients in descending powers of s. See also: INITIAL, IMPULSE, LSIM and
DSTEP.

```
% Descrizione nello spazio di stato (ISU)  
>>A=[0 1; -1 -1]; B=[0;1]; C=[1,1]; D=0;  
>>step(A,B,C,D)  
>>print -deps step1.eps
```



```
>>t=1:0.1:30;  
>>step(A,B,C,D,1,t)
```

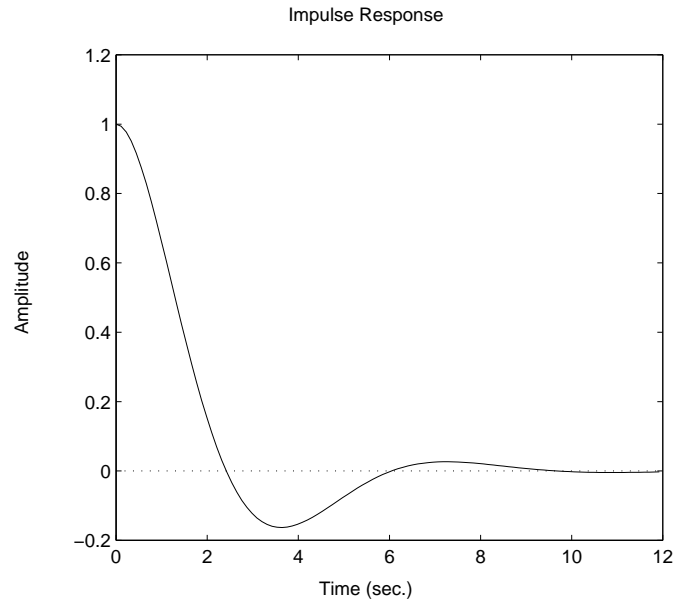


```
%Risposta impulsiva  
>>help impulse
```

IMPULSE Impulse response of continuous-time linear systems. IMPULSE(A,B,C,D,IU) plots the time response of the linear system . $x = Ax + Bu$ $y = Cx + Du$

to an impulse applied to the single input IU. The time vector is automatically determined. `IMPULSE(NUM,DEN)` plots the impulse response of the polynomial transfer function $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$ where NUM and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers of s. `IMPULSE(A,B,C,D,IU,T)` or `IMPULSE(NUM,DEN,T)` uses the user-supplied time vector T which must be regularly spaced. When invoked with left hand arguments, `[Y,X,T] = IMPULSE(A,B,C,D,...)` `[Y,X,T] = IMPULSE(NUM,DEN,...)` returns the output and state time history in the matrices Y and X. No plot is drawn on the screen. Y has as many columns as there are outputs and `length(T)` rows. X has as many columns as there are states. See also: `STEP,INITIAL,LSIM` and `DIMPULSE`.

```
>>impulse(A,B,C,D)
```

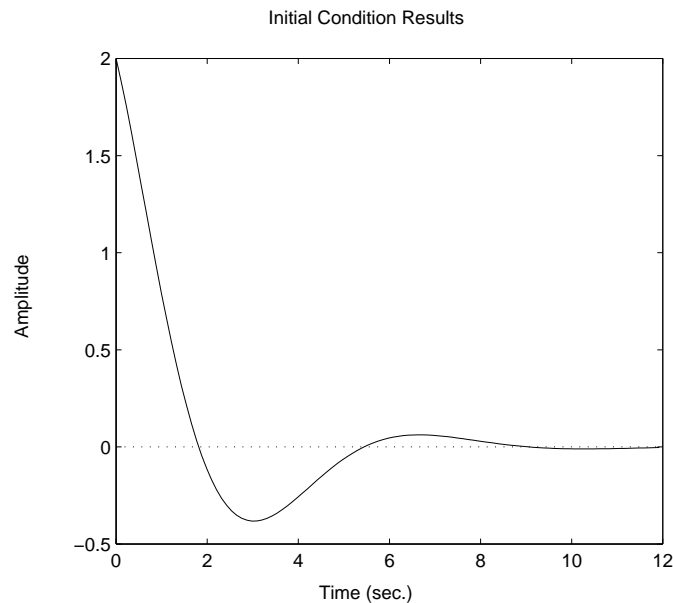


```
% Evoluzione libera  
>>help initial
```

`INITIAL` Initial condition response of continuous-time linear systems. `INITIAL(A,B,C,D,X0)` plots the time response of the linear system $\dot{x} = Ax + Bu$ $y = Cx + Du$ due to an initial condition on the states. The time vector is automatically determined based on the system poles and zeros. `INITIAL(A,B,C,D,X0,T)` plots the initial condition response for the times specified in the vector T. The time vector must be regularly spaced. When invoked with left hand arguments: `[Y,X,T] = INITIAL(A,B,C,D,X0,...)` returns the output and state responses (Y and X), and the time vector (T). No plot is drawn on the screen. The matrix Y has as many columns as outputs and one row for element in T. Similarly, the matrix X has

as many columns as states and length(T) rows. See also: IMPULSE,STEP,LSIM, and DINITIAL.

```
>>initial(A,B,C,D,[1,1])
```



%Ingresso generico

```
>>help lsim
```

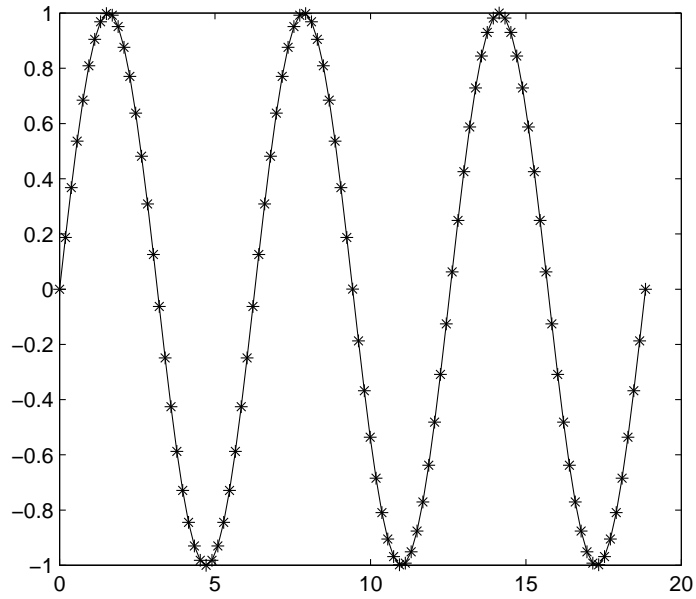
LSIM Simulation of continuous-time linear systems to arbitrary inputs.

LSIM(A,B,C,D,U,T) plots the time response of the linear system: $\dot{x} = Ax + Bu$ $y = Cx + Du$ to the input time history U. Matrix U must have as many columns as there are inputs, U. Each row of U corresponds to a new time point, and U must have LENGTH(T) rows. The time vector T must be regularly spaced. LSIM(A,B,C,D,U,T,X0) can be used if initial conditions exist. LSIM(NUM,DEN,U,T) plots the time response of the polynomial transfer function $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$ where NUM and DEN contain the polynomial coefficients in descending powers of s. When invoked with left hand arguments, $[Y,X] = \text{LSIM}(A,B,C,D,U,T)$ $[Y,X] = \text{LSIM}(\text{NUM},\text{DEN},U,T)$ returns the output and state time history in the matrices Y and X. No plot is drawn on the screen. Y has as many columns as there are outputs, y, and with LENGTH(T) rows. X has as many columns as there are states. See also: STEP,IMPULSE,INITIAL and DLSIM.

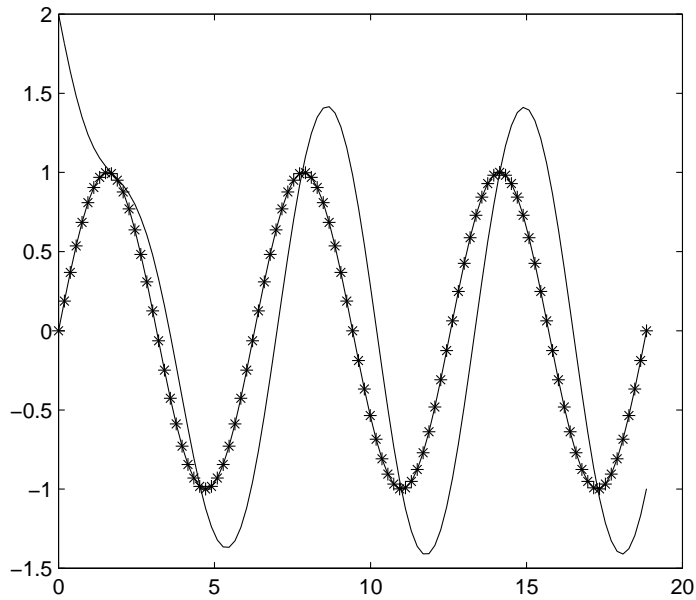
```
>>t=0:0.01*6*pi:6*pi;
```

```
>>u=sin(t);
```

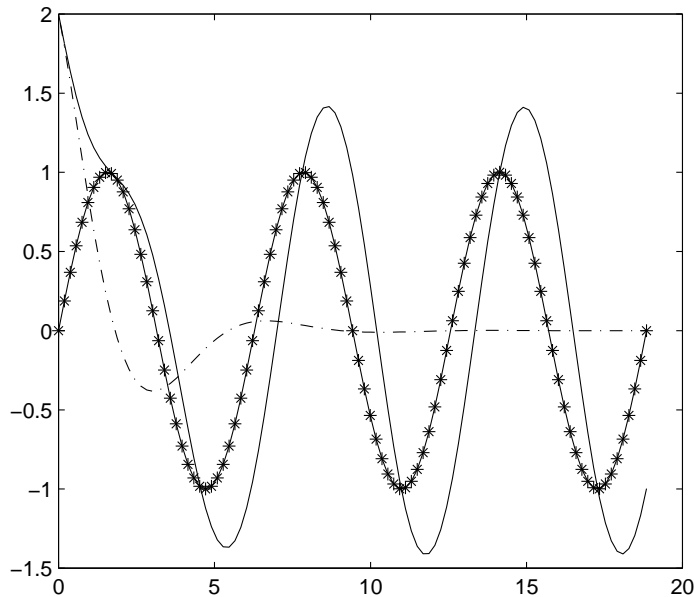
```
>>plot(t,u,'r',t,u,'r*')
```



```
>>Y0=lsim(A,B,C,D,u,t,[1,1]);  
>>hold on;  
>>plot(t,Y0,'g')
```



```
>>Y1=lsim(A,B,C,D,0*u,t,[1,1]);  
>>plot(t,Y1,'c:')
```



```
% Per mettere in evidenza il transitorio,
% calcoliamo la risposta a regime
% Passiamo alla fdt
>>help ss2tf
```

SS2TF State-space to transfer function conversion.
 [NUM,DEN] = SS2TF(A,B,C,D,iu) calculates the transfer function:

$$H(s) = \frac{NUM(s)}{DEN(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

of the system:

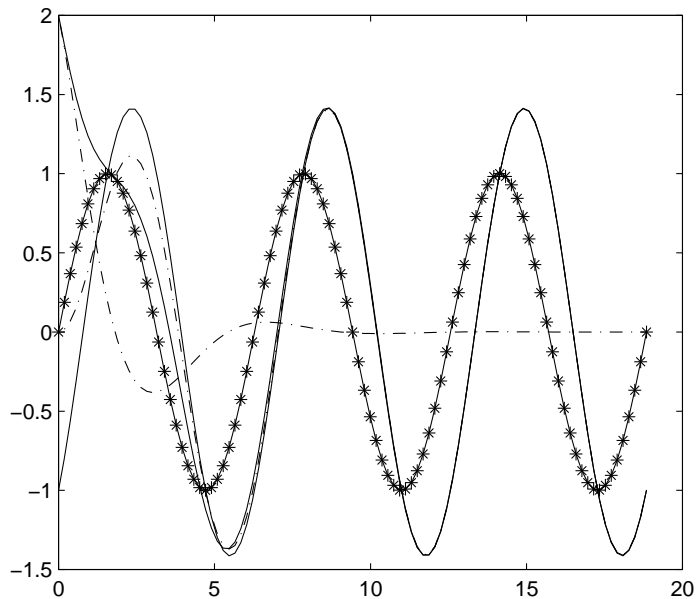
$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

from the iu'th input. Vector DEN contains the coefficients of the denominator in descending powers of s. The numerator coefficients are returned in matrix NUM with as many rows as there are outputs y. See also: TF2SS.

```
>>[num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
num =
    0    1    1
den =
    1.0000    1.0000    1.0000
>>omega=1; j=sqrt(-1);
>>Gomega=polyval(num,j*omega)/polyval(den,j*omega)
Gomega =
```

```
1.0000 - 1.0000i
>>abs(Gomega)
ans =
    1.4142
>>angle(Gomega)
ans =
   -0.7854

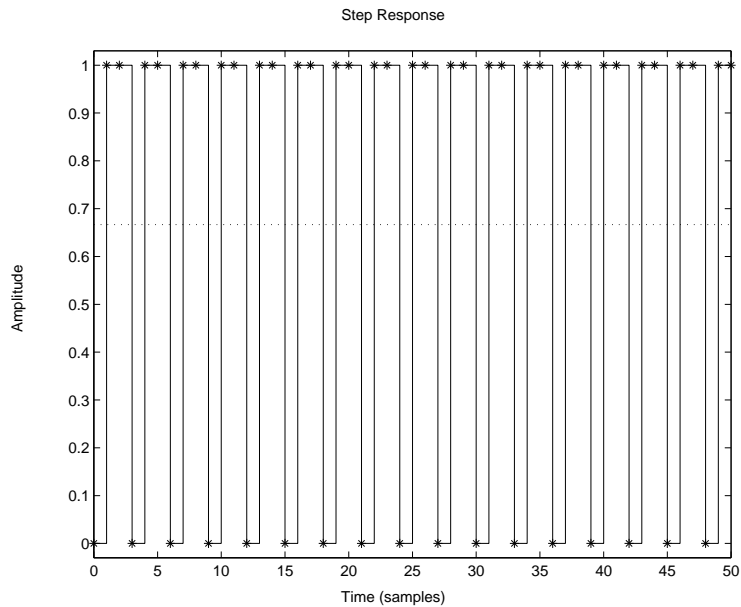
>>Yr=abs(Gomega)*sin(t+angle(Gomega));
>>plot(t,Yr,'k-')
% risposta forzata
>>Yf=lsim(A,B,C,D,u,t,[0,0]);
>>plot(t,Yf,'y-.'
```



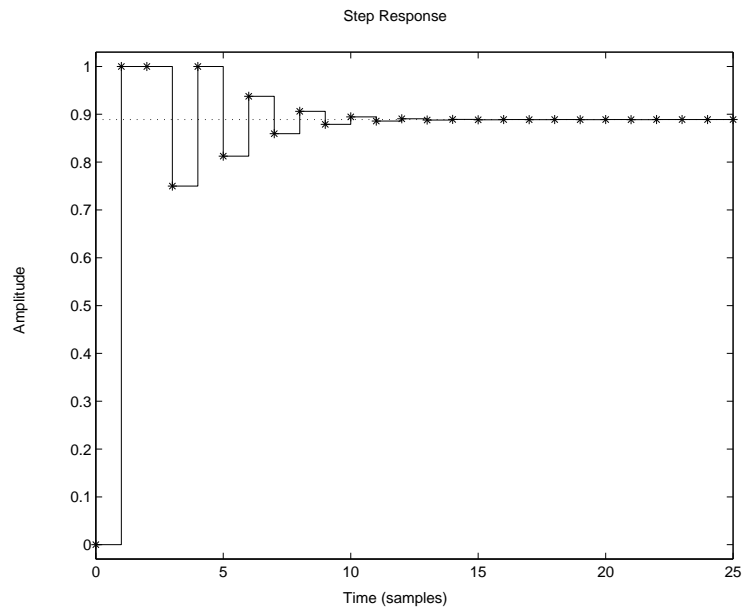
```
%% Risposte dei sistemi lineari TD
%% Descrizione ISU TD:
%% attenzione al diverso significato!
>>A=[0 1; -1 -1]; B=[0;1]; C=[1,1]; D=0;
eig(A)
ans =
   -0.5000 + 0.8660i
   -0.5000 - 0.8660i
>>abs(ans)
ans =
    1
    1
```



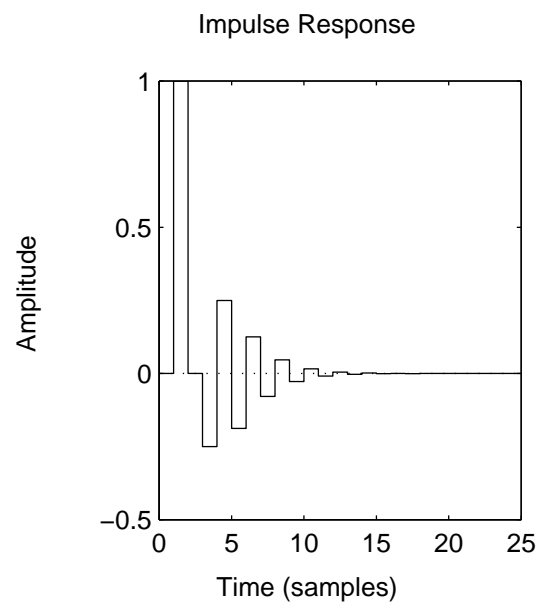
```
%Non e' asintoticamente stabile. Infatti
>>dstep(A,B,C,D,1)
>>y=dstep(A,B,C,D,1);
>>hold on; plot(0:length(y)-1,y,'r*')
```



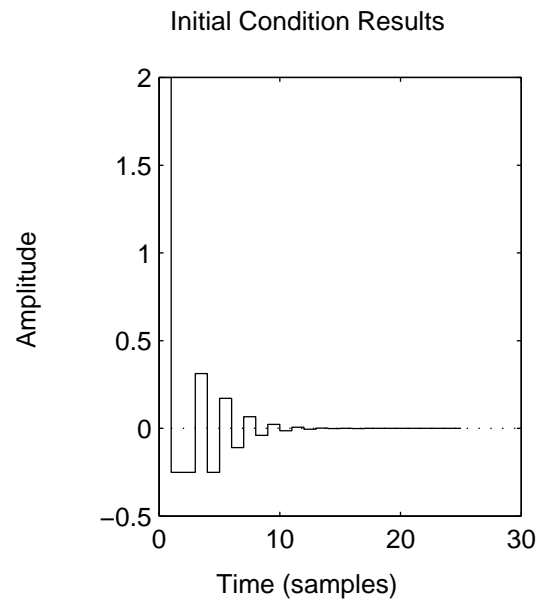
```
%%Scegliamo allora
>>A=[0 1; -1/4 -1]; B=[0;1]; C=[1,1]; D=0;
>>abs(eig(A))
ans =
    0.5000
    0.5000
>>dstep(A,B,C,D,1);
>>hold on;
>>y=dstep(A,B,C,D,1);
>>plot(0:length(y)-1,y,'r*'); hold on; plot(0:length(y)-1,y,'r')
```



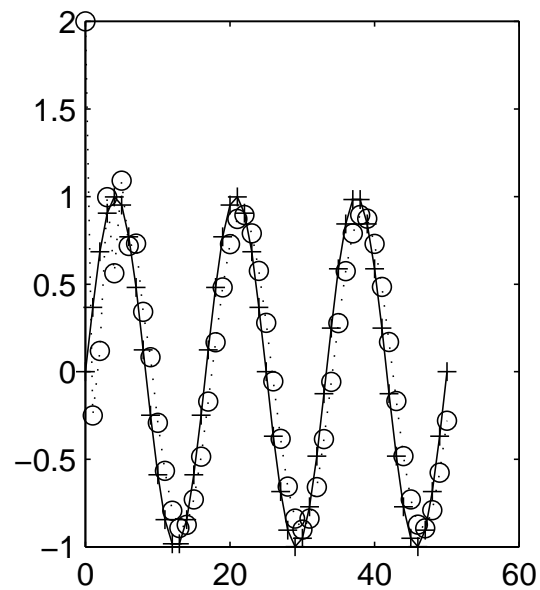
```
>>hold off;  
>>dimpulse(A,B,C,D)
```



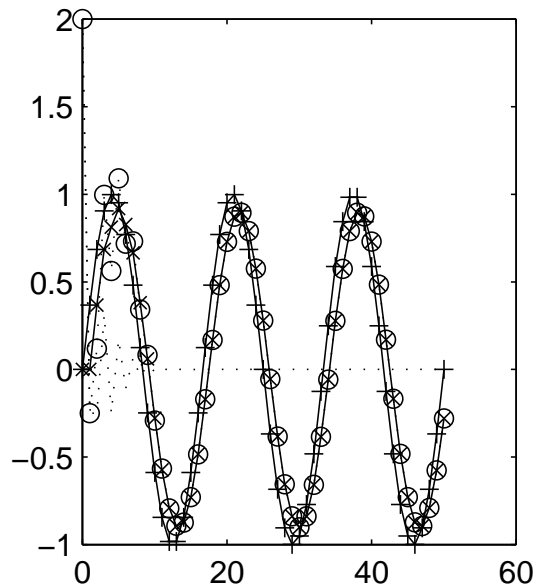
```
>>dinitial(A,B,C,D,[1,1])
```



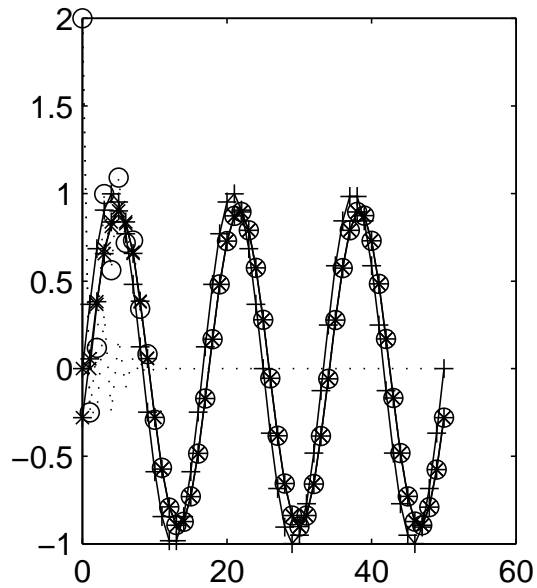
```
% Risposta ad una sinusoide  
>>t=0:50;  
>>u=sin(0.12*pi*t);  
>>plot(t,u,'r+')  
>>hold on; plot(t,u,'r')  
% Risposta totale  
>>Y0=dlsim(A,B,C,D,u,[1,1]);  
>>plot(t,Y0,'go',t,Y0,':')
```



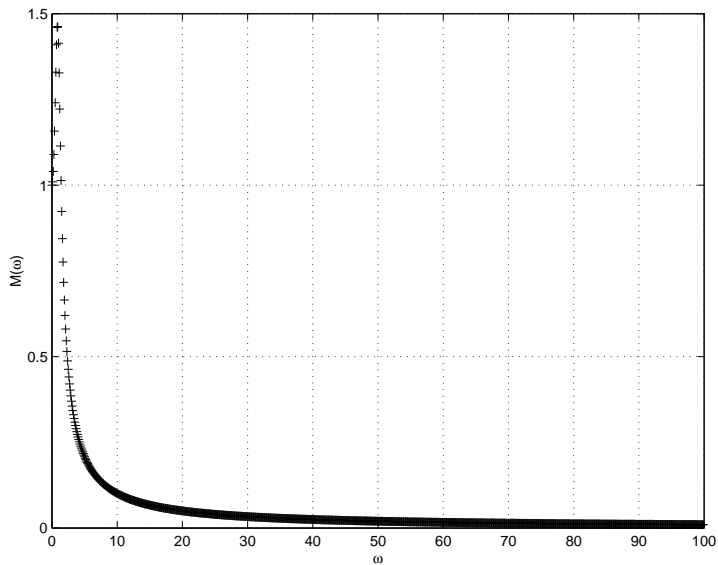
```
%% Risposta libera
>> Yl=dlsim(A,B,C,D,0*u,[1,1]);
>> plot(t,Yl,'k:')
%% Risposta forzata
>> Yf=dlsim(A,B,C,D,u,0*[1,1]);
>> plot(t,Yf,'cx',t,Yf,'c-')
```



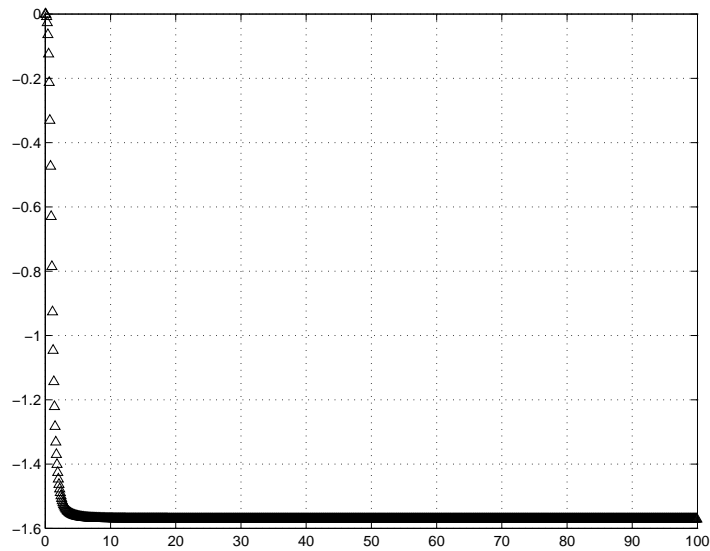
```
%% Risposta di regime
>> [num,den]=ss2tf(A,B,C,D);
>> theta=0.12*pi; etheta=exp(sqrt(-1)*theta);
>> Getheta=polyval(num,etheta)/polyval(den,etheta);
>> Yr=abs(Getheta)*sin(0.12*pi*t+angle(Getheta));
>> plot(t,Yr,'g*',t,Yr,'g-')
```



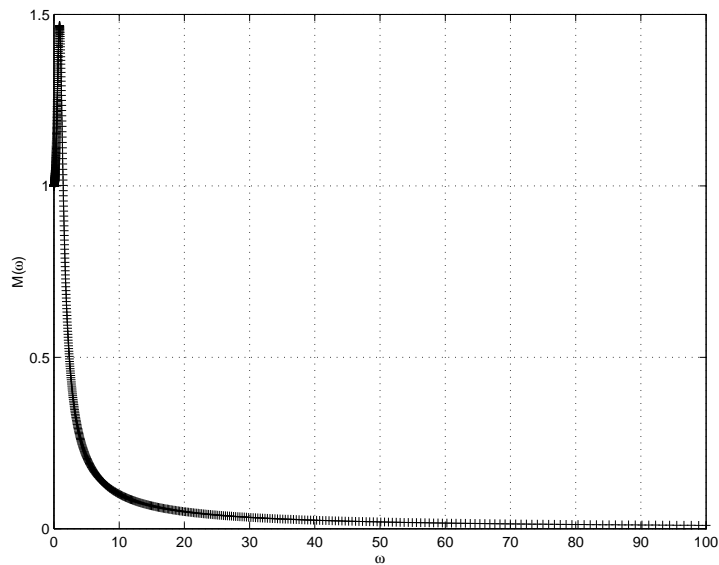
```
%% Risposta armonica TC
>>omega=0.0001:100/1000:100;
>>Gomega=polyval(num,j*omega)./polyval(den,j*omega);
>>M=abs(Gomega);
>>phi=angle(Gomega);
>>plot(omega, M,'r+'); grid
```



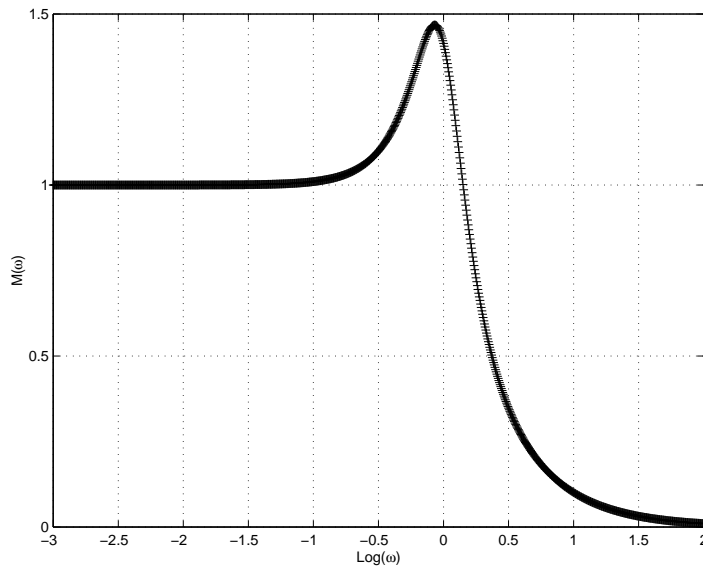
```
>>plot(omega, phi,'r^'); grid
```



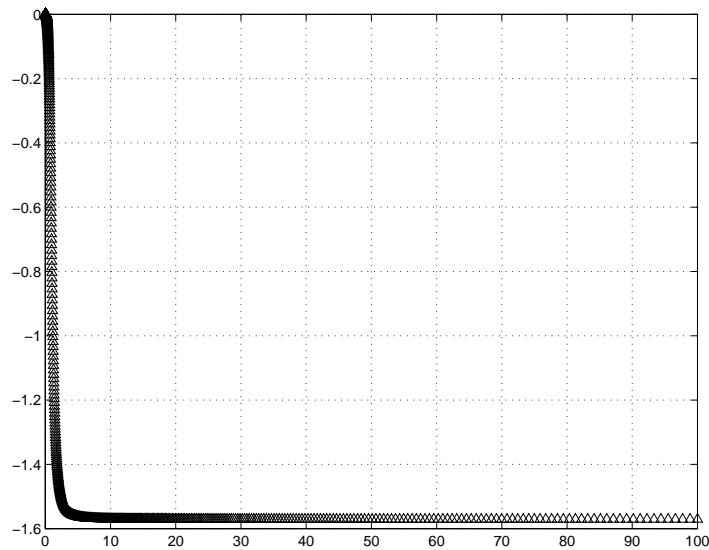
```
>>%Scala logaritmica
>>eomega=-3:5/1000:2;
>>omega=10.^(eomega);
>>Gomega=polyval(num,j*omega)./polyval(den,j*omega);
>>M=abs(Gomega); phi=angle(Gomega);
>>plot(omega, M,'r+');grid;
>>xlabel('\omega'); ylabel('M(\omega)')
```



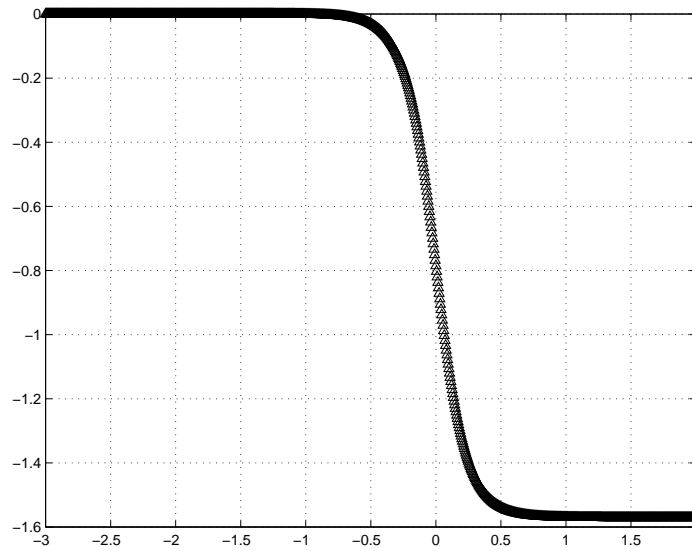
```
>>plot(eomega, M,'r+');grid;
```



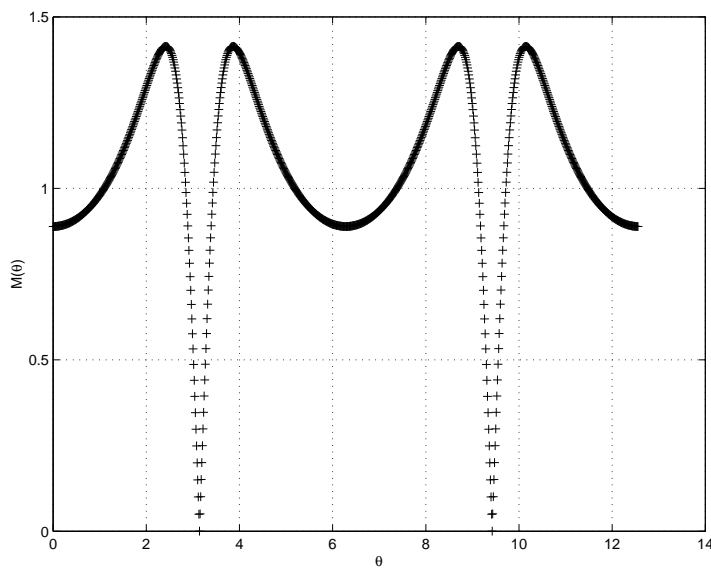
```
>>plot(omega, phi,'r^'); grid
```



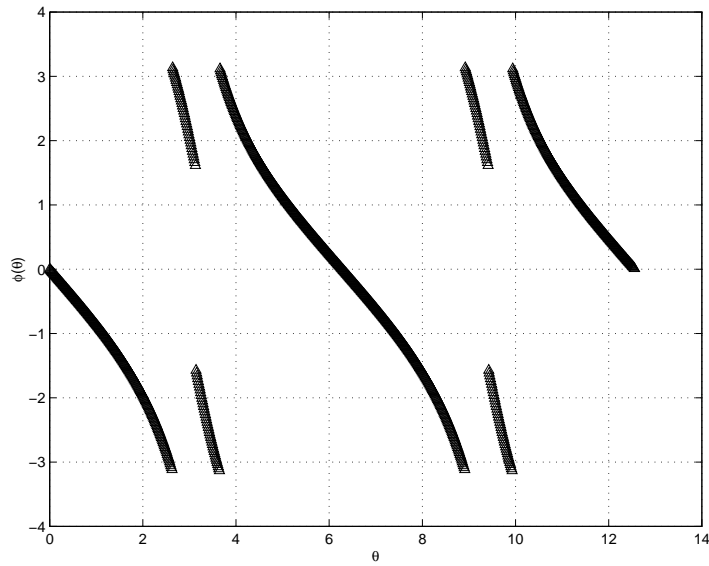
```
>>plot(eomega, phi,'r^'); grid
```



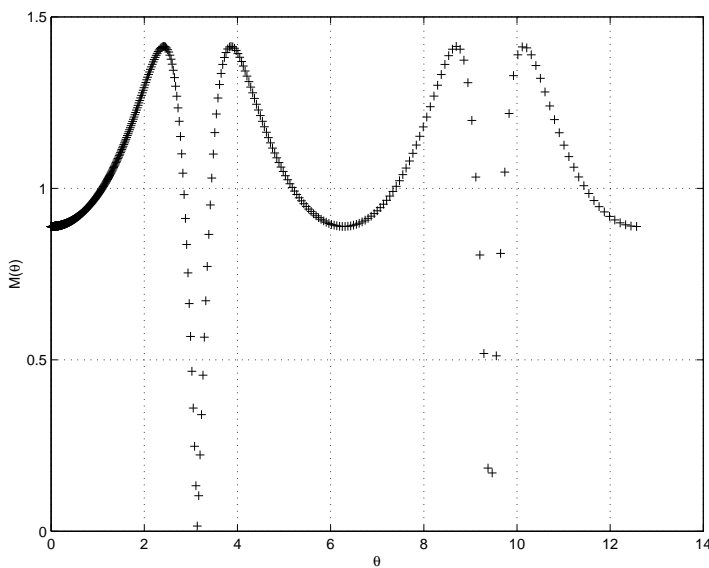
```
>> %% Risposta armonica TD
>>theta=0.0001:4*pi/1000:4*pi;
>>etheta=exp(j*theta);
>>Gtheta=polyval(num,etheta)./polyval(den,etheta);
>>M=abs(Gtheta); phi=angle(Gtheta);
>>plot(theta, M,'r+'); grid
```



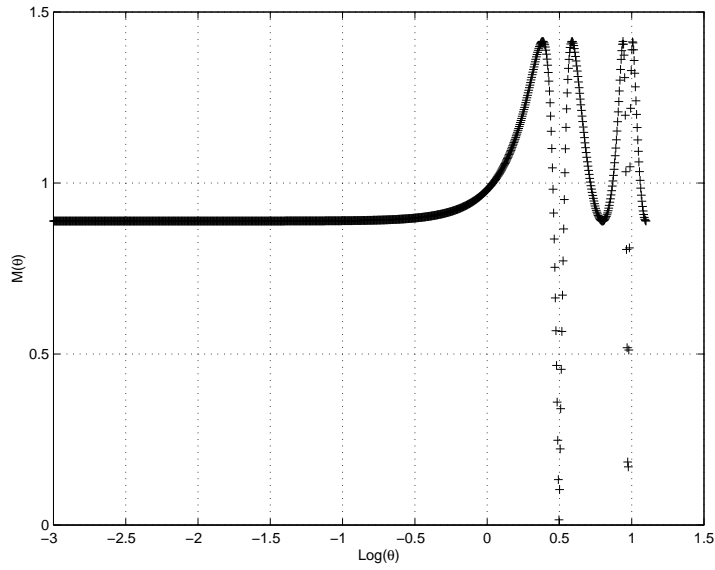
```
>>plot(theta, phi,'r^'); grid
```

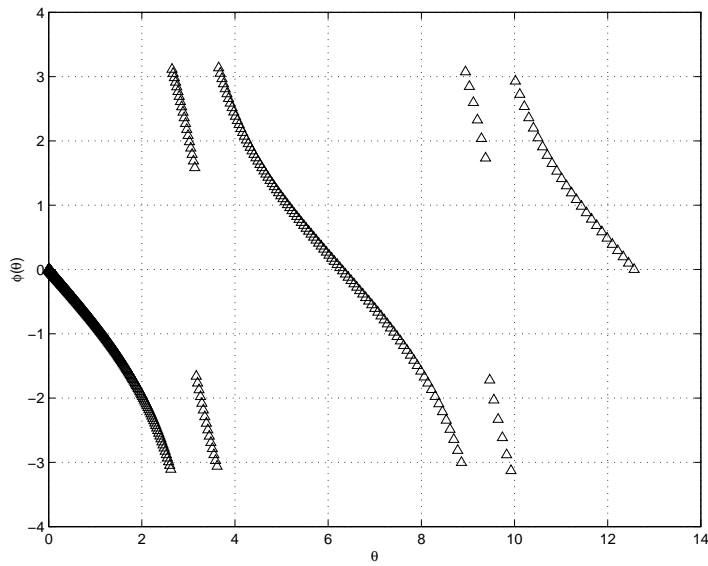
```
>>% Scala logaritmica  
>>ltheta=-3:(log10(4*pi)+3)/1000:log10(4*pi);  
>>theta=10.^(ltheta); etheta=exp(j*theta);  
>>Gtheta=polyval(num,etheta)./polyval(den,etheta);  
>>M=abs(Gtheta); phi=angle(Gtheta);  
>>plot(theta, M,'r+'); grid
```



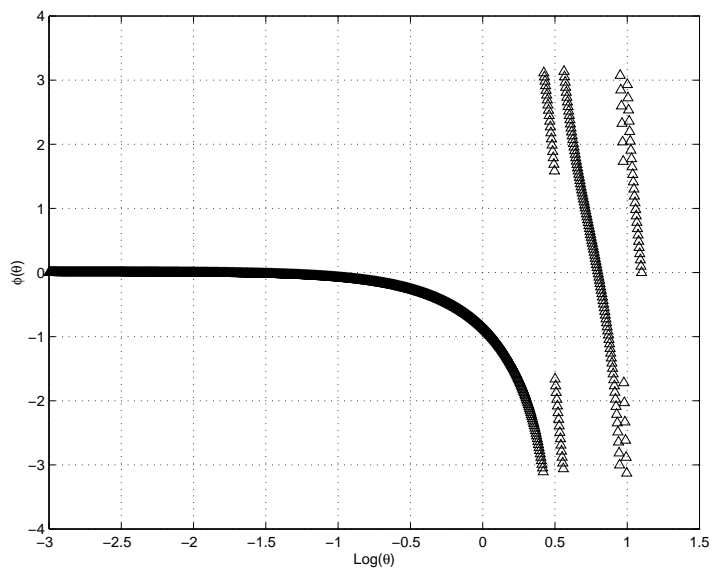
```
>>plot(ltheta, M,'r+'); grid
```



```
>>plot(theta, phi,'r^'); grid
```



```
>>plot(ltheta, phi,'r^'); grid
```



9 Diagrammi di Bode

I diagrammi di Bode di un sistema TC descritto dalla f.d.t. $G(s)$ riportano il modulo $M(\omega) = |G(\mathbf{j}\omega)|$ e la fase $\beta = \phi(\omega)$ di $G(\mathbf{j}\omega)$, in funzione della pulsazione ω che varia tra 0 e ∞ .

Nel caso di sistemi asintoticamente stabili, i diagrammi di Bode sono quindi una rappresentazione della funzione di risposta armonica del sistema. È possibile peraltro tracciare i diagrammi di Bode anche per sistemi non asintoticamente stabili, o instabili, pur non essendo definita in questo caso una risposta armonica.

Per tracciare i diagrammi, è conveniente preliminarmente porre la f.d.t. in una particolare forma, detta *forma di Bode*:

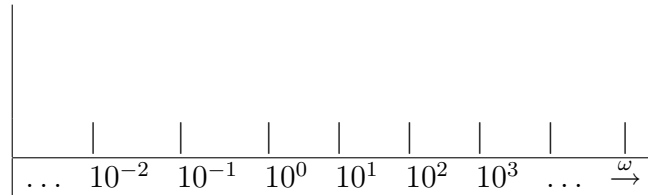
$$G(s) = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \tau'_i s)}{s^h \prod_{i=1}^{n-h} (1 + \tau_i s)}$$

in cui $\tau'_i = -\frac{1}{z_i}$ e $\tau_i = -\frac{1}{p_i}, \forall p_i \neq 0$, e $K = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{i=1}^{n-h} (-p_i)}$. Si avrà quindi esplicitamente

$$G(\mathbf{j}\omega) = K \frac{(1 + \mathbf{j}\omega\tau'_1) \cdots (1 + \mathbf{j}\omega\tau'_m)}{(\mathbf{j}\omega)^h (1 + \mathbf{j}\omega\tau_1) \cdots (1 + \mathbf{j}\omega\tau_{n-h})}$$

I diagrammi di Bode vengono rappresentati su carta logaritmica (per le ampiezze) e carta semilogaritmica (per le fasi).

L'asse delle ascisse è in scala logaritmica per entrambe i diagrammi; i valori riportati sull'asse sono comunque quelli della pulsazione (non del suo logaritmo)



Si dice *decade* la distanza, in scala logaritmica, tra due numeri il cui rapporto è 10 (es. 20 e 200).

Si dice *ottava* la distanza, in scala logaritmica, tra due numeri il cui rapporto è 2 (es. 20 e 40).

Il modulo viene riportato in *decibel (db)*: il valore B_{db} in decibel della grandezza B è dato da $B_{db} = 20 \log_{10} B = 20 \text{Log} B$

Osserva che se $B = R10^n$, $1 \leq R < 10$ si ha $B_{db} = 20 \text{ Log } R + 20n = R_{db} + 20n$, $0 \leq R_{db} < 20$.

La fase viene rappresentata in radianti o gradi.

L'utilizzo della scala logaritmica per le pulsazioni è giustificato dalla opportunità di mostrare in maggior dettaglio il comportamento dei diagrammi per pulsazioni basse, pur mantenendo ampio il campo di visualizzazione delle funzioni $M(\omega)$ e $\phi(\omega)$

L'utilizzo del logaritmo del modulo e dell'argomento di $G(\mathbf{j}\omega)$ è invece spiegato dalla facilità con cui si possono tracciare (anche manualmente) i diagrammi in questo caso, utilizzando le proprietà dei logaritmi di prodotti di numeri complessi. Si ricorda che, se a, b sono due numeri complessi scritti in notazione esponenziale come $a = |a|e^{\mathbf{j}\arg(a)}$ e $b = |b|e^{\mathbf{j}\arg(b)}$, si ha $ab = |a||b|e^{\mathbf{j}(a+b)}$ e dunque $\log(|ab|) = \log(|a|) + \log(|b|)$, e $\arg(ab) = \arg(a) + \arg(b)$.

Per il diagramma delle ampiezze si ha quindi:

$$\begin{aligned} 20 \text{ Log } |G(\mathbf{j}\omega)| = & \\ & 20 \text{ Log } |K| + 20 \text{ Log } |1 + \mathbf{j}\omega\tau'_1| + \cdots + 20 \text{ Log } |1 + \mathbf{j}\omega\tau'_m| + \\ & + 20 \text{ Log } \frac{1}{|(\mathbf{j}\omega)^h|} + 20 \text{ Log } \frac{1}{|1 + \mathbf{j}\omega\tau_1|} + \cdots + 20 \text{ Log } \frac{1}{|1 + \mathbf{j}\omega\tau_{n-h}|}. \end{aligned}$$

Per il diagramma delle fasi invece

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = & \\ & \arg K + \arg(1 + \mathbf{j}\omega\tau'_1) + \cdots + \arg(1 + \mathbf{j}\omega\tau'_m) + \\ & + \arg\left(\frac{1}{(\mathbf{j}\omega)^h}\right) + \arg\left(\frac{1}{1 + \mathbf{j}\omega\tau_1}\right) + \cdots + \arg\left(\frac{1}{1 + \mathbf{j}\omega\tau_{n-h}}\right) \end{aligned}$$

La costruzione dei due diagrammi si riduce al calcolo del contributo, in modulo e in fase, di ciascuna componente moltiplicativa che compare in $G(\mathbf{j}\omega)$ e alla somma dei vari contributi.

9.1 Il contributo di K

Possiamo scrivere

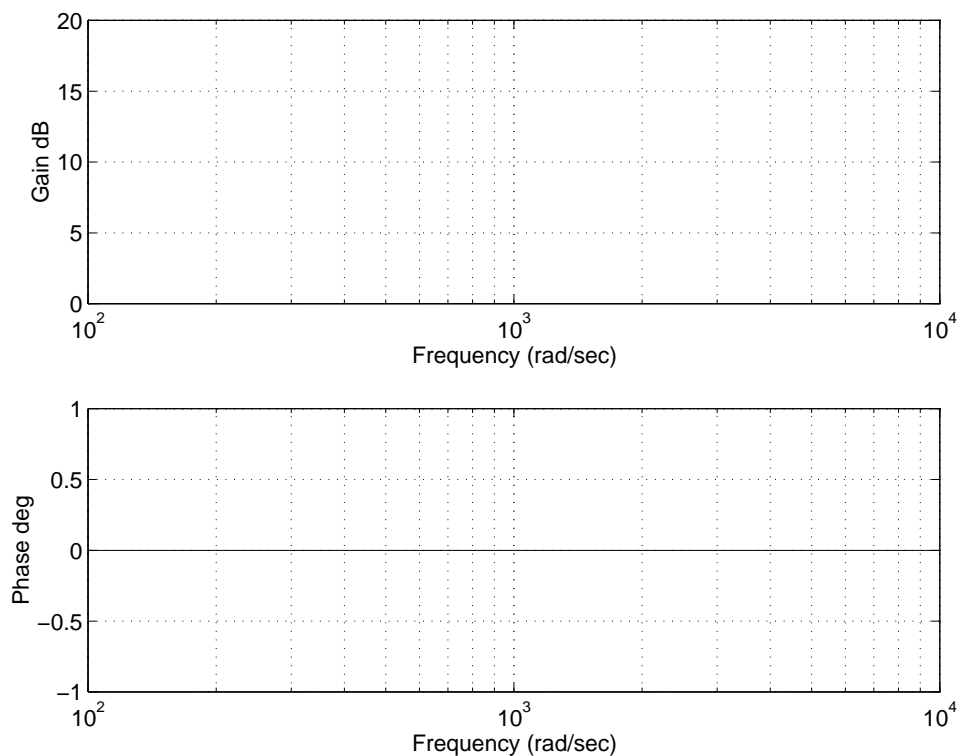
$$K = |K|e^{-\mathbf{j}r\pi} \text{ con } r = \begin{cases} 0 & \text{se } K > 0 \\ 1 & \text{se } K < 0 \end{cases}$$

Si ha per il diagramma delle ampiezze:

$$M(\omega) = 20 \text{ Log } |K| = \text{costante}$$

per il diagramma delle fasi si ha:

$$\phi = \arg(K) = \begin{cases} 0 & \text{se } K > 0 \\ -\pi & \text{se } K < 0 \end{cases}$$



9.2 Il contributo di $\frac{1}{(j\omega)^h}$

Possiamo scrivere

$$\frac{1}{(j\omega)^h} = (\omega e^{j\frac{\pi}{2}})^{-h} = (\omega)^{-h} e^{-jh\frac{\pi}{2}}.$$

Per il diagramma delle ampiezze si ha:

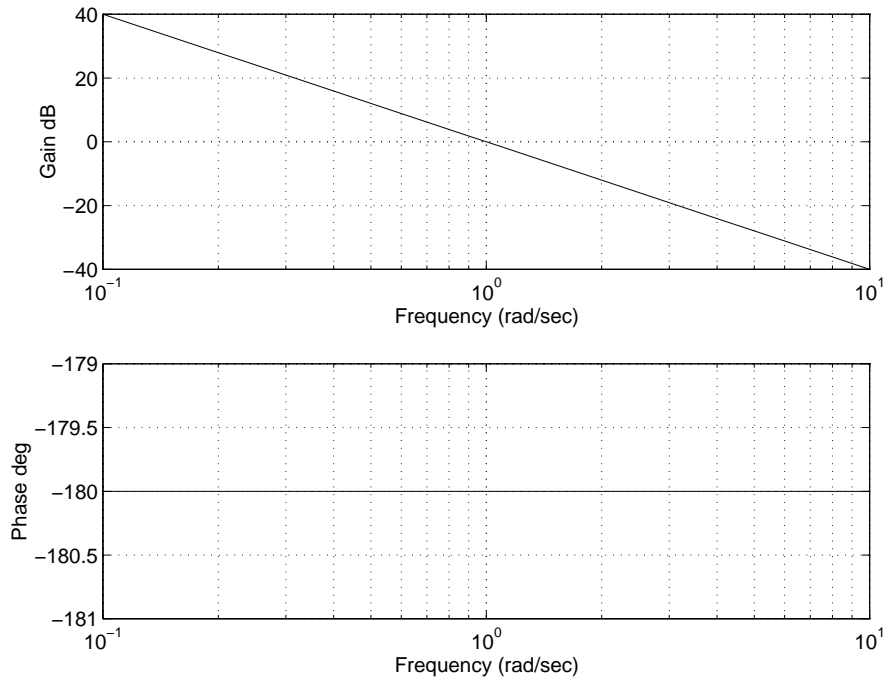
$$M(\omega) = 20 \text{ Log}(\omega)^{-h} = -20h \text{ Log} \omega,$$

che si rappresenta sulla carta logaritmica come una retta per l'origine ($\omega = 1$, cioè $\text{Log} \omega = 0$) con pendenza di $-20h$ db per decade (ovvero $\approx -6h$ db per ottava).

Per il diagramma delle fasi si ha:

$$\phi = \arg\left(\frac{1}{(j\omega)^h}\right) = -h\frac{\pi}{2} = \text{costante}.$$

Esempio: Diagrammi di Bode di $G(s) = \frac{1}{s^2}$



9.3 Il Contributo di $\frac{1}{1+j\omega\tau}$

Possiamo scrivere

$$\frac{1}{1+j\omega\tau} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} e^{-j\arctan\omega\tau}.$$

Per il diagramma delle ampiezze si ha:

$$M(\omega) = 20 \text{ Log } \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}.$$

- Per $\omega\tau \ll 1$ si ha $M(\omega) \simeq 0$,
- per $\omega\tau = 1$ si ha $M(\omega) = -20 \text{ Log } \sqrt{2} \simeq -3\text{db}$,
- per $\omega\tau \gg 1$ si ha $M(\omega) \simeq 20 \text{ Log } \frac{1}{\omega\tau} = 20 \text{ Log } \frac{1}{\tau} - 20 \text{ Log } \omega$.

Dunque il diagramma ha una rappresentazione asintotica data da un asintoto orizzontale (per ω che tende a 0) passante per 0 e da un asintoto costituito da una retta di pendenza -20db/decade che interseca l'asse delle ascisse nel punto $\text{Log } \omega = \text{Log } \frac{1}{\tau}$. La curva reale si discosta di -3db dal diagramma asintotico nel punto di rottura(o ginocchio), cioè per $\text{Log } \omega = \text{Log } \frac{1}{\tau}$.

Per le fasi abbiamo:

$$\phi = -\arctan\omega\tau$$

a) $\tau > 0$ (cioè polo a parte reale negativa):

- per $\omega\tau \ll 1$ si ha $\phi \simeq 0$,
- per $\omega\tau = 1$ si ha $\phi = -\frac{\pi}{4}$,
- per $\omega\tau \gg 1$ si ha $\phi = -\frac{\pi}{2}$.

b) $\tau < 0$ (cioè polo a parte reale positiva):

- per $\omega\tau \ll 1$ si ha $\phi \simeq 0$,
- per $\omega\tau = 1$ si ha $\phi = \frac{\pi}{4}$,
- per $\omega\tau \gg 1$ si ha $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Il diagramma delle fasi può essere bene approssimato con la spezzata ottenuta collegando i due asintoti per $\phi = 0$ e $\phi = -\frac{\pi}{2}$ con la tangente al diagramma effettivo nel punto $\omega = \frac{1}{\tau}$ in cui $\phi = -\frac{\pi}{4}$.

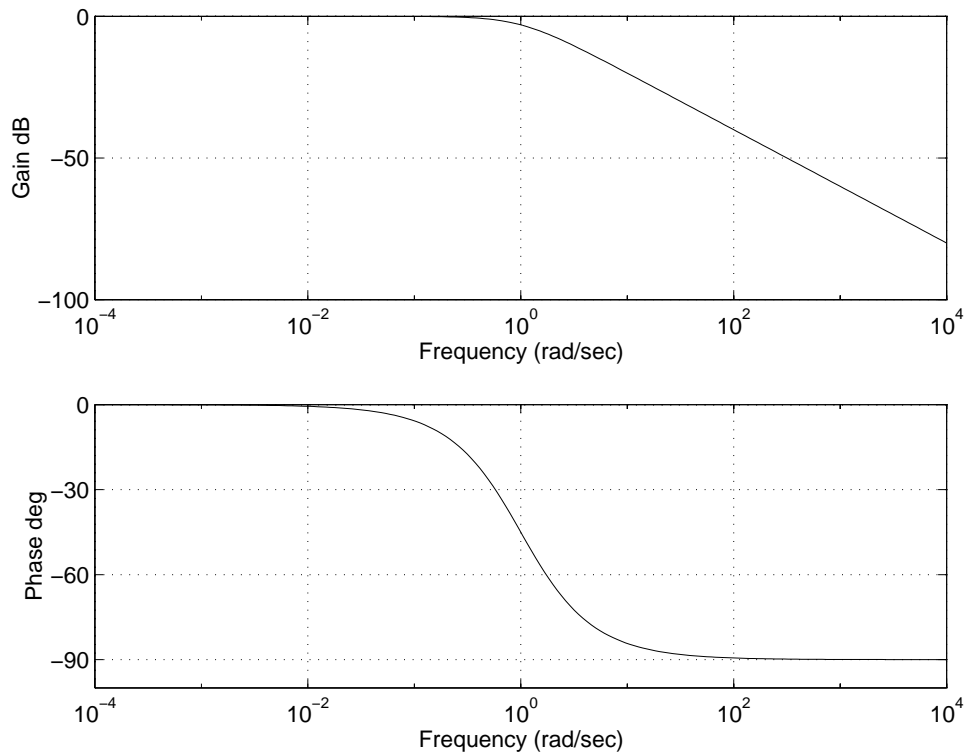
Calcoliamo la pendenza della tangente al diagramma in $\omega = \frac{1}{\tau}$:

$$\left. \frac{d\phi}{d \operatorname{Log} \omega} \right|_{\omega=\frac{1}{\tau}} = \left. \frac{d\phi}{d\omega} \frac{d\omega}{d \operatorname{Log} \omega} \right|_{\omega=\frac{1}{\tau}} = - \frac{1}{1 + (\omega\tau)^2} \tau \omega \Big|_{\omega=\frac{1}{\tau}} = - \frac{\log 10}{2}$$

La retta passante per $(\omega = 1/\tau, \phi = -\pi/4)$ con inclinazione $1/2$ interseca l'asse $\phi = 0$ in ω_a con

$$\frac{\pi/4}{\operatorname{Log}(1/\tau) - \operatorname{Log} \omega_a} = \frac{\log 10}{2}$$

cioè $\omega_a = \frac{1}{4.81} \frac{1}{\tau}$, quindi circa una decade meno una ottava prima di $1/\tau$. Analogamente per il punto $\omega_b = 4.81 \frac{1}{\tau}$ dove la retta a pendenza $-1/2$ interseca la retta $\phi = -\pi/2$.



9.4 Il Contributo di $1 + j\omega\tau'$

Possiamo scrivere

$$1 + j\omega\tau' = \sqrt{1 + \omega^2\tau'^2} e^{j \arctan \omega\tau'}$$

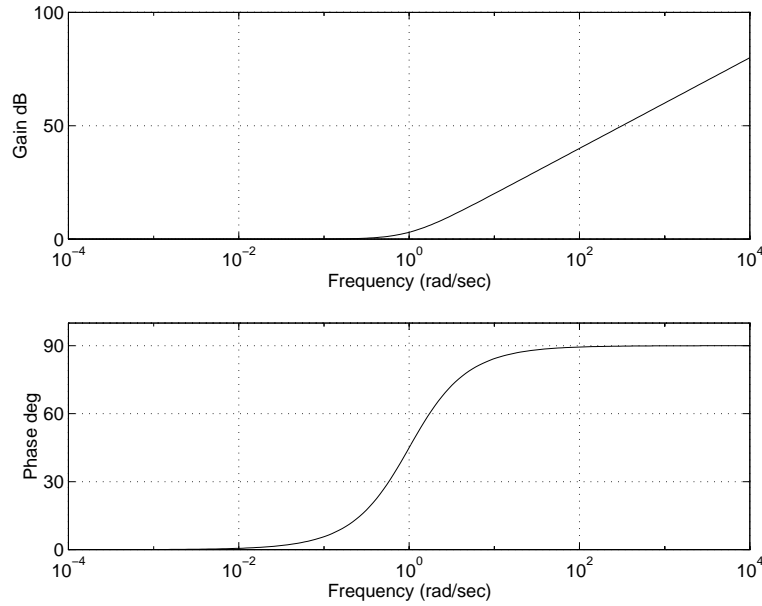
e dunque

$$M(\omega) = -20 \text{Log} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau'^2}}$$

e

$$\phi = \arctan \omega\tau'$$

che, a meno di segno, sono identiche alle relazioni ottenute nel caso precedente, dunque possono essere tracciate semplicemente ribaltando rispetto all'asse delle ascisse i diagrammi precedentemente ottenuti.



9.5 Coppia di poli complessi coniugati

$$\frac{1}{(1 + \mathbf{j}\omega\tau)(1 + \mathbf{j}\omega\bar{\tau})}$$

Ricordando che $-\frac{1}{\tau}$, $-\frac{1}{\bar{\tau}}$ sono i poli della funzione si denoti con $\omega_n = \frac{1}{|\tau|}$ il modulo dei poli, con $\pm\phi$ la loro fase e con $\delta = -\cos(\phi)$. Utilizzando questa notazione si può riscrivere il contributo dei poli coniugati nella *forma reale di Bode*

$$\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\delta}{\omega}s + 1} \Big|_{s=\mathbf{j}\omega} = \frac{1}{(1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2) + \mathbf{j}2\delta\frac{\omega}{\omega_n}}.$$

Consideriamo solo il caso $|\delta| < 1$ (se nella $G(s)$ apparisse un termine quadratico con $|\delta| > 1$, esso corrisponderebbe infatti a due poli reali distinti, mentre $|\delta| = 1$ corrisponde a due poli reali coincidenti).

Inoltre, per la regola di Descartes, $\delta > 0 \Rightarrow \pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$ (poli stabili), mentre $\delta < 0 \Rightarrow -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2$ (poli instabili).

Per il modulo si ha:

$$M(\omega) = 20 \text{ Log } \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\delta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}.$$

quindi

per $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ si ha $M(\omega) \simeq 0$,

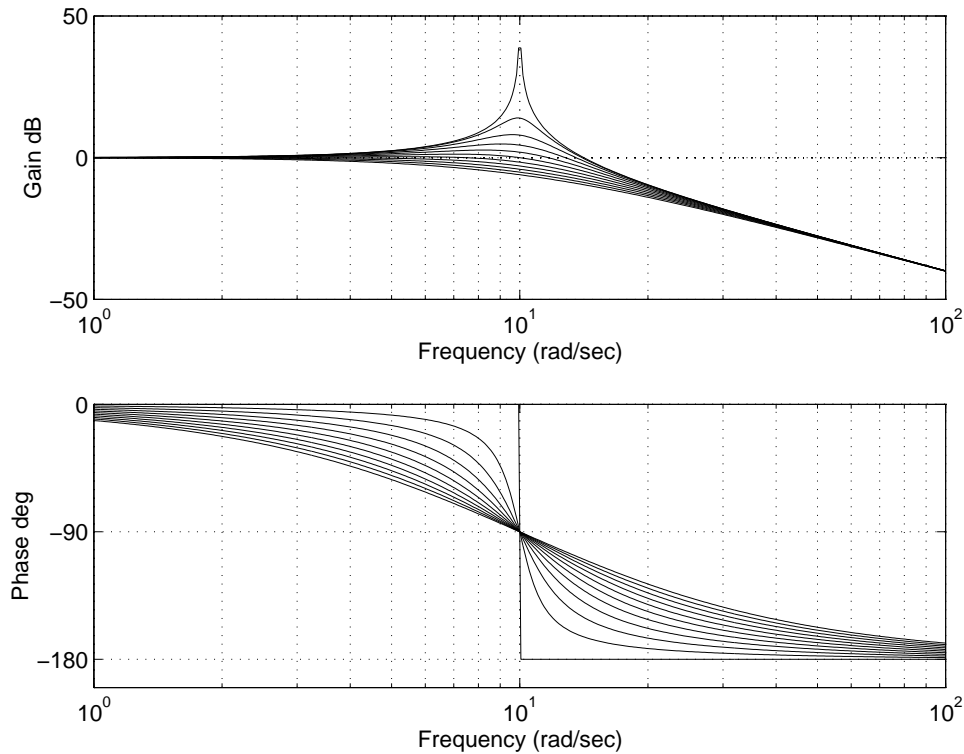
per $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ si ha $M(\omega) = -20 \text{ Log } 2|\delta|$,

per $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ si ha $M(\omega) \simeq -20 \text{ Log } \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = 40 \text{ Log } \omega_n - 40 \text{ Log } \omega$.

Il diagramma ha una rappresentazione asintotica data da un asintoto orizzontale (per ω che tende a 0) passante per 0 e da un asintoto costituito da una retta di pendenza -40db/decade (-12 db/ottava) che interseca l'asse delle ascisse nel punto $\text{Log } \omega = \text{Log } \omega_n$.

La curva reale si discosta in tale punto dalla rappresentazione asintotica (vedi figura) di

$$-20 \text{ Log } 2|\delta| = \begin{cases} -6db & \text{per } |\delta| = 1 \\ 0 & \text{per } |\delta| = 1/2 \\ \infty & \text{per } |\delta| = 0 \end{cases}$$



$0 \leq \delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\pi/4 \leq \phi \leq \pi/2$ ovvero $3\pi/4 \leq \phi \leq \pi$): la curva ha un massimo.
$0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ ($\pi/3 \leq \phi \leq \pi/2$ ovvero $5\pi/6 \leq \phi \leq \pi$): la curva attraversa l'asse delle ascisse a dx del punto $\omega = \omega_n$ (sta sopra la sua approssimazione asintotica).
$\frac{1}{2} \leq \delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\pi/4 \leq \phi \leq \pi/3$ ovvero $3\pi/4 \leq \phi \leq 5\pi/6$): la curva attraversa l'asse delle ascisse a sx del punto $\omega = \omega_n$.
$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \delta \leq 1$ ($0 \leq \phi \leq \pi/4$ ovvero $\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/4$): non attraversa l'asse delle ascisse (sta sotto la sua approssimazione asintotica).



Il massimo dell'ampiezza si ottiene calcolando il minimo della funzione

$$(1 - u^2)^2 + 4\delta^2 u^2,$$

dove $u = \frac{\omega}{\omega_n}$.

Calcolando la derivata rispetto a u e uguagliando a zero si ottiene:

$$-4u(1 - u^2) + 8\delta^2 u = 0$$

la cui soluzione (si trascura la soluzione banale che indica un comportamento stazionario del diagramma logaritmico all'infinito) è data da

$$u_R = \frac{\omega_R}{\omega_n} = \sqrt{1 - 2\delta^2}, \quad \delta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

che corrisponde alla *pulsazione di risonanza*

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}.$$

A tale pulsazione di risonanza corrisponde il *picco di risonanza*

$$M_R = \frac{1}{\sqrt{(1-1+2\delta^2)^2 + 4\delta^2(1-2\delta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{4\delta^2 - 4\delta^4}} = \frac{1}{2|\delta|\sqrt{1-\delta^2}}$$

Per il diagramma delle fasi si ha

$$\phi = -\arctan \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

a) $\delta > 0$ (poli stabili):

- per $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ si ha $\phi \simeq 0$,
- per $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ si ha $\phi = -\frac{\pi}{2}$,
- per $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ si ha $\phi = -\pi$.

b) $\delta < 0$ (poli instabili):

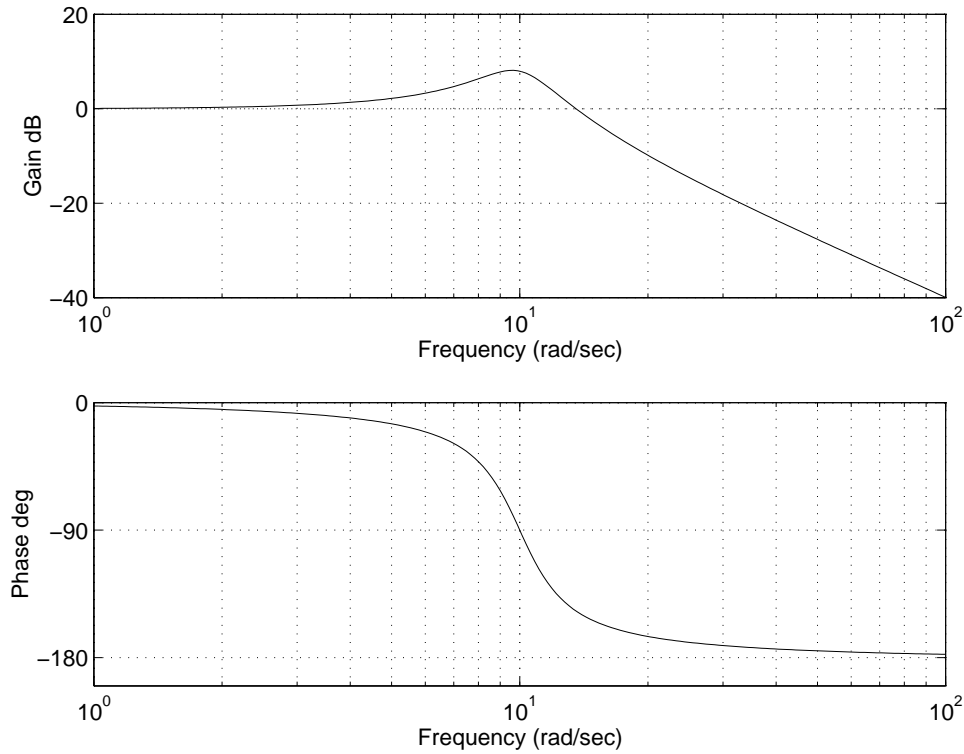
- per $\frac{\omega}{\omega_n} \ll 1$ si ha $\phi \simeq 0$,
- per $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$ si ha $\phi = \frac{\pi}{2}$,
- per $\frac{\omega}{\omega_n} \gg 1$ si ha $\phi = \pi$.

Il diagramma asintotico delle fasi (per $\delta > 0$) può essere rappresentato come la spezzata ottenuta collegando i due asintoti per $\phi = 0$ e $\phi = -\pi$ con la tangente al diagramma effettivo nel punto $\omega = \omega_n$ in cui $\phi = -\frac{\pi}{2}$.

Calcoliamo la pendenza della tangente al diagramma in $\omega = \omega_n$; ponendo $u = \frac{\omega}{\omega_n}$ possiamo scrivere $\phi = -\arctan \frac{2\delta u}{1-u^2}$ e la tangente viene calcolata valutando

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\phi}{d \text{Log } \omega} \right|_{\omega=\omega_n} &= \left. \frac{d\phi}{du} \frac{du}{d \text{Log } \omega} \right|_{u=1} = \\ &= -\frac{1}{1+(\frac{2\delta u}{1-u^2})^2} \left(\frac{2\delta}{1-u^2} + \frac{4\delta u^2}{(1-u^2)^2} \right) u \log 10 \Big|_{u=1} = -\frac{\log 10}{\delta} \end{aligned}$$

Per $\delta \mapsto 0$ la tangente al diagramma in $\omega = \omega_n$ tende a $-\infty$; mentre per $\delta = 1$ la tangente vale -1 .



9.6 Coppia di zeri complessi coniugati

$$(1 + j\omega\tau')(1 + j\omega\bar{\tau}') = (1 - \omega^2|\tau'|^2) + j2\omega|\tau'| \cos(\phi')$$

dove $\frac{1}{|\tau'|}$ è il modulo degli zeri e $\pm\phi'$ è la fase.

Utilizzando la notazione $\omega'_n = \frac{1}{|\tau'|}$ e $-\cos\phi' = \delta'$ si ottiene

$$M(\omega) = -20 \text{Log} \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n'^2})^2 + 4\delta'^2 \frac{\omega^2}{\omega_n'^2}}}$$

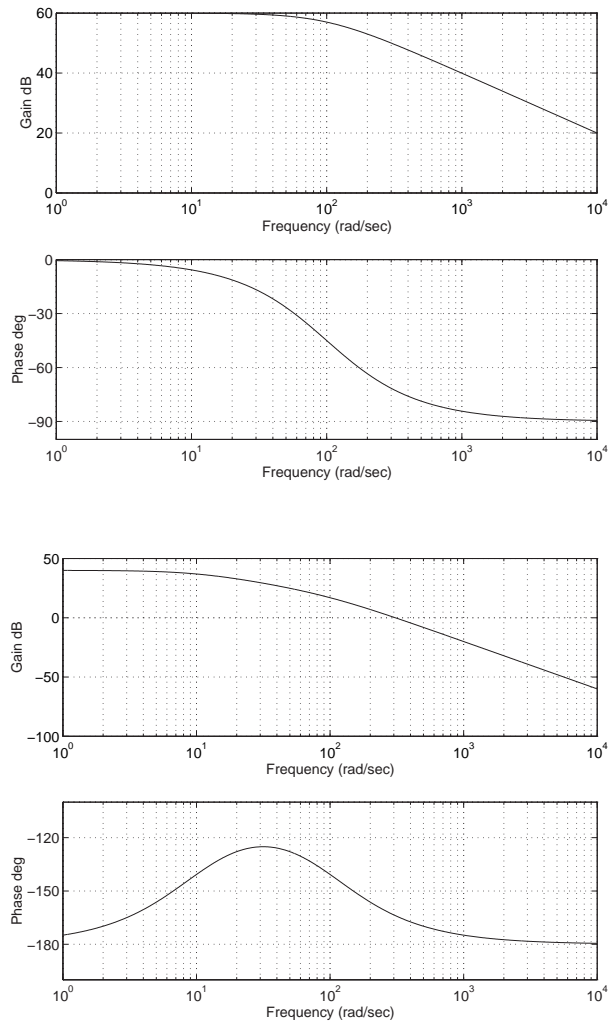
$$\phi = \arctan \frac{2\delta' \frac{\omega}{\omega_n'}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n'^2}}$$

I diagrammi sono quindi semplicemente ottenuti ribaltando rispetto all'asse delle ascisse i precedenti.

9.7 Esempi

Esempio 1

$$G(s) = 1000 \frac{1}{0.01s + 1}$$



Esempio 2

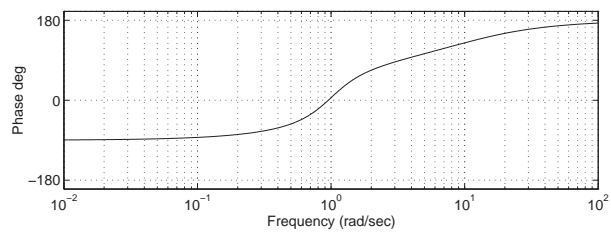
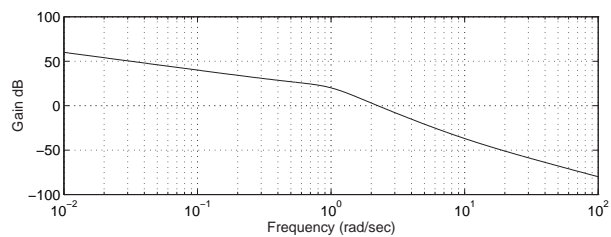
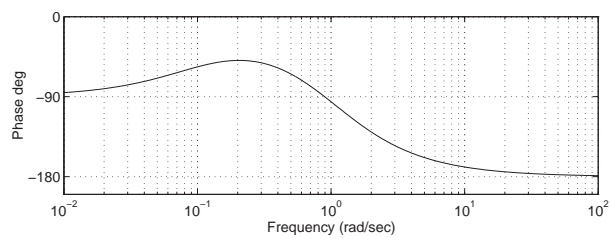
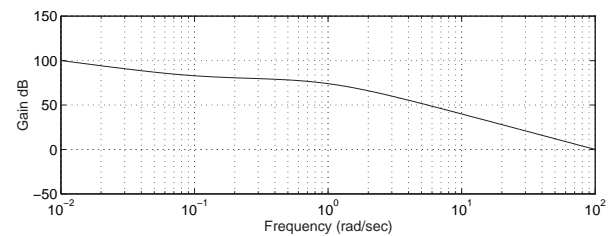
$$G(s) = -100 \frac{1}{(0.01s + 1)(-0.1s + 1)}$$

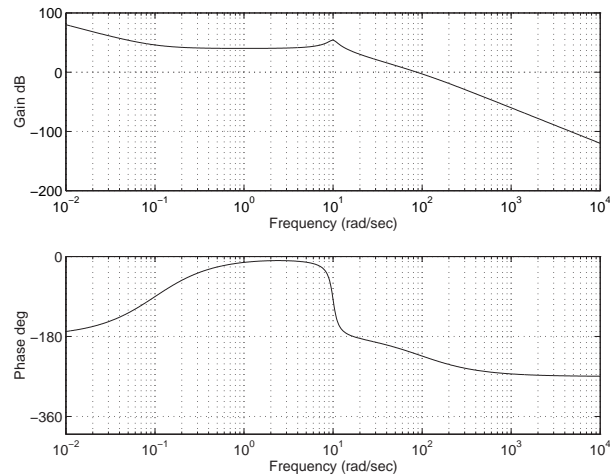
Esempio 3

$$G(s) = 1000 \frac{10s + 1}{s(s + 1)^2}$$

Esempio 4

$$G(s) = 10 \frac{0.1s + 1}{s(s^2 - s + 1)}$$





Esempio 5

$$G(s) = \frac{(10s + 1)^2}{s^2(0.01s + 1)(0.01s^2 + 0.02s + 1)}$$

9.8 Formula di Bode

Dalla analisi dei diagrammi del modulo e della fase della risposta armonica di sistemi LTITC che abbiano tutti gli zeri a parte reale negativa (oltre che tutti i poli, come richiesto dall'uso stesso del concetto di risposta armonica), si osserva che vi è una relazione tra la pendenza del diagramma dei moduli e la fase: quando la pendenza è nulla, la fase tende ad essere zero, se la pendenza è di $-20h$ db/decade, la fase tende a $-h\pi/2$. La relazione è valida tanto più quanto più la pendenza è costante nei pressi della pulsazione che si considera.

Questa correlazione tra la fase $\phi(\omega) = \arg G(j\omega)$ e il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ è in effetti resa precisa dalla cosiddetta *formula di Bode*:

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{M(\omega)} \frac{dM(\omega)}{d\omega} \log \left| \frac{\omega + w}{\omega - w} \right| dw$$

che esprime il fatto che la pendenza alla pulsazione w dipende in effetti dall'andamento del diagramma dei moduli a tutte le pulsazioni, ma il logaritmo del rapporto che appare nell'integrando è molto piccolo per ω lontane da w .

La formula di Bode può essere riscritta in termini dei logaritmi delle grandezze, cioè in termini delle pendenze dei diagrammi di Bode:

$$\phi(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{du} \log \left(\coth \frac{|u|}{2} \right) du$$

dove $\alpha = \log M(\omega)$ e $u = \log(\frac{w}{\omega})$

La formula di Bode può essere utile, nel caso di una derivazione sperimentale della risposta armonica di un sistema, per ricavare il diagramma della fase (di più difficile misura) dal diagramma delle ampiezze. Si procede in questo caso nel seguente modo:

- si approssima il diagramma dei moduli con una spezzata, per la quale la pendenza è costante a tratti
- per ogni tratto di pendenza $\frac{d\alpha}{du}$ costante, si calcola

$$\phi(w) = \frac{d\alpha}{du} \beta(u)$$

dove

$$\beta(u) = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \log \left(\coth \frac{|u|}{2} \right) du \right)$$

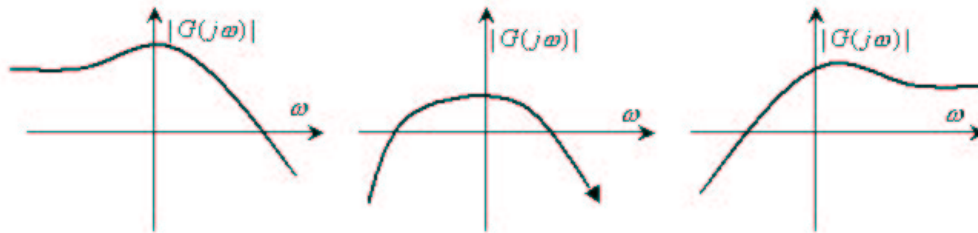
è una funzione che si tabula facilmente (ad es. con Matlab)

La fase calcolata con la formula di Bode ad una certa pulsazione è quella col minimo valore assoluto compatibile col diagramma delle ampiezze: altri andamenti delle fasi compatibili con lo stesso diagramma delle ampiezze che si potrebbero ottenere se gli zeri della $G(s)$ fossero a parte reale positiva, avrebbero certamente sfasamenti più elevati. Per questo motivo, i sistemi che non hanno zeri (né poli) a parte reale positiva si dicono *a fase minima*.

10 Banda passante, picco e pulsazione di risonanza

I diagrammi di Bode permettono la visualizzazione di alcune caratteristiche qualitativamente importanti dei sistemi dinamici lineari.

I tre comportamenti tipici di sistemi dinamici riportati in figura

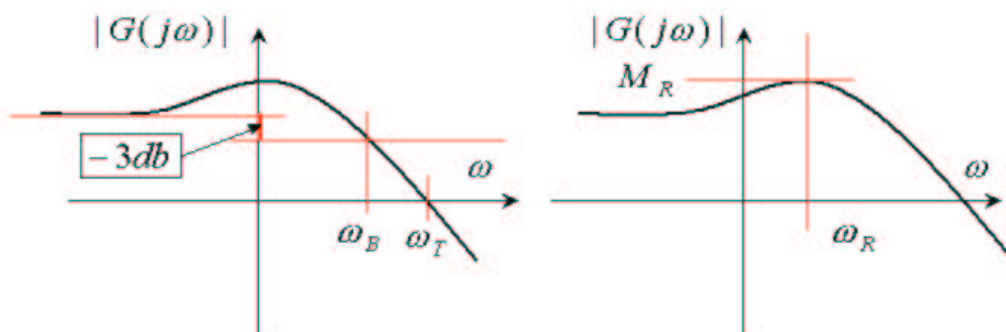


sono detti “passa-basso”, “passa-banda” e “passa-alto”, rispettivamente. Il significato di tali nomi è chiaro in relazione al significato fisico dei diagrammi di risposta armonica: tutti i segnali sinusoidali di pulsazioni alle quali il diagramma delle ampiezze ha valori molto inferiori a quelli massimi “non passano”, ovvero generano a regime uscite di trascurabile entità.

I sistemi più frequentemente incontrati nella ingegneria sono quelli passa-basso: tra questi, vi è la quasi totalità dei sistemi meccanici.

È utile fornire un indice per confrontare, in modo sintetico seppur qualitativo, diversi sistemi con analoghe caratteristiche passa-basso. Si definiscono a tale scopo, con riferimento ai diagrammi in figura, le seguenti grandezze:

- Pulsazione di taglio: è la pulsazione ω_T alla quale il diagramma delle ampiezze di Bode attraversa l’asse a $0db$, cioè la pulsazione che distingue le sinusoidi che il sistema amplifica in uscita, da quelle che il sistema attenua;
- Banda passante (a $-3db$): è la pulsazione alla quale il sistema attenua di $3db$ rispetto al valore di amplificazione statica, cioè per pulsazioni che tendono a zero (tendono cioè a $-\infty$ sull’asse delle ascisse del diagramma di Bode).
- Picco di risonanza M_R : valore massimo assunto dal diagramma delle ampiezze, normalizzato rispetto al valore del guadagno statico;
- Pulsazione di risonanza ω_R , valore della pulsazione corrispondente al picco di risonanza.



11 Diagrammi di Nyquist e Nichols

Si è visto che i diagrammi di risposta armonica di un sistema asintoticamente stabile contengono tutte le informazioni necessarie alla caratterizzazione del suo comportamento per qualsiasi ingresso, e si è detto che i diagrammi di Bode, che sono applicabili anche a sistemi non asintoticamente stabili rappresentati da una funzione polinomiale fratta $G(s)$, sono anch'essi strumenti molto utili nello studio dei sistemi lineari.

Vedremo adesso alcune diverse rappresentazioni grafiche delle stesse informazioni contenute nel tracciamento dei diagrammi di Bode, cioè in sostanza dell'andamento della variabile complessa $G(j\omega)$ per ω variabile tra 0 e ∞ .

I diagrammi di Nyquist riportano tali dati direttamente sul piano complesso. Gli assi del diagramma polare (o di Nyquist) riportano quindi la parte reale $R_g(j\omega)$ di $G(j\omega)$ sulle ascisse, e la parte immaginaria $I_G(j\omega)$ sulle ordinate. Ad ogni valore di ω corrisponde un punto nel piano complesso: il vettore che unisce l'origine del piano con questo punto è lungo $M(\omega) = |\mathbf{G}(j\omega)|$, e forma un angolo con l'asse delle ascisse di $\phi(\omega) = \arg(\mathbf{G}(j\omega))$ (contato con segno positivo per rotazioni antiorarie).

Al variare di ω , il punto rappresentativo percorre una curva, detta diagramma polare o di Nyquist della funzione di trasferimento. È consuetudine graduare questa curva con i valori della pulsazione ω corrispondenti ad intervalli scelti su una scala logaritmica.

Il digramma di Nyquist si può ottenere in modo immediato dal diagramma di Bode dello stesso sistema. Vale la pena comunque osservare che alcune caratteristiche qualitative dei diagrammi polari possono essere ottenute per ispezione diretta del sistema, e questo fatto potrà essere utile in alcune applicazioni.

Riferendoci ad un sistema descritto da una f.d.t.

$$G(s) = K_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} = K \frac{\prod_{i=1}^m (1 + \tau'_i s)}{s^h \prod_{i=1}^{n-h} (1 + \tau_i s)}$$

si ha:

- 1) Il punto di inizio del diagramma (per $\omega = 0$) è a distanza finita dall'origine solo se il sistema non ha poli nell'origine ($h = 0$). In tal caso, il diagramma inizia da un valore reale (positivo o negativo) pari al guadagno statico del sistema K .
- 2) Per sistemi con un polo nell'origine, si ha $M(0) = \infty$. La fase vale $\phi(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \arg G(j\omega) = \arg \frac{K}{(j\omega)} = -\text{sign}(K) \frac{\pi}{2}$. Ad esempio quindi, se $K > 0$, il diagramma inizia staccandosi da un asintoto verticale

nel semipiano inferiore. La posizione dell'asintoto può essere valutata considerando il $\lim_{\omega \rightarrow 0} R_G(\omega)$, che vale

$$\sigma = K \left(\sum_{i=1}^m R(\tau'_i) - \sum_{i=1}^{n-1} R(\tau_i) \right)$$

Se $G(s)$ è in forma reale di Bode, cioè

$$G(s) = K \frac{\prod_{i=1}^{m-2\bar{m}} (1 + \tau'_i s) \prod_{i=1}^{\bar{m}} (1 + \frac{2\delta'_i}{\omega'_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega'^2_{n,i}})}{s^h \prod_{i=1}^{n-h-2\bar{n}} (1 + \tau_i s) \prod_{i=1}^{\bar{n}} (1 + \frac{2\delta_i}{\omega_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega^2_{n,i}})}$$

con $h = 1$, allora si ha

$$\sigma = K \left(\sum_{i=1}^{m-2\bar{m}} \tau'_i + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \frac{2\delta'_i}{\omega'_{n,i}} - \sum_{i=1}^{n-1-2\bar{n}} \tau_i - \sum_{i=1}^{\bar{n}} \frac{2\delta_i}{\omega_{n,i}} \right)$$

- 3) Per sistemi con doppio polo nell'origine, si ha ancora che il diagramma inizia con un punto a distanza infinita. Sia la parte reale che la parte immaginaria hanno limite infinito per ω tendente a zero; in ogni caso per la fase vale $\phi(0) = -\text{sign}(K)$. Per sistemi con molteplicità h dei poli nell'origine, il modulo iniziale è infinito e la fase di partenza del diagramma vale $\phi(0) = -\text{sign} K h \frac{\pi}{2}$.
- 4) Per $\omega \rightarrow \infty$, si ha che il punto limite del diagramma polare è finito (e pari a K_0) solo per sistemi con grado relativo $n - m$ zero (cioè propri ma non strettamente). Altrimenti, il diagramma tende all'origine, con fase data da

$$\phi(\infty) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg G(j\omega) = -(n - m) \text{sign} K_0 \frac{\pi}{2}$$

- 5) Si osservi che $\text{sign} K = \text{sign} K_0$ se il numero di poli e zeri a parte reale positiva è nullo o pari; $\text{sign} K = -\text{sign} K_0$ altrimenti.

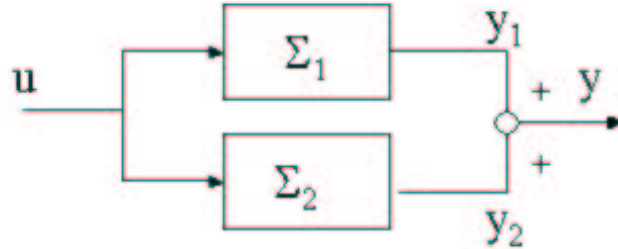
I diagrammi di Nyquist presentano l'informazione sull'andamento della curva $G(j\omega)$ in modo più compatto dei (due) diagrammi di Bode, ma hanno due grandi limitazioni legate al fatto di non usare scale logaritmiche: non permettano una visualizzazione dettagliata degli andamenti alle basse frequenze e non consentono la derivazione dell'andamento di f.d.t. combinate per prodotto mediante somma dei contributi.

A tali inconvenienti risponde il diagramma di Nichols, che riporta sulle ascisse la fase di $G(j\omega)$ (in radianti o gradi) e sulle ordinate il modulo di $G(j\omega)$ in decibel. I diagrammi di Nichols sono graduati nelle pulsazioni.

I diagrammi di Nichols possono quindi essere ottenuti per somma di contributi elementari, quali:

- $G(s) = K$: il diagramma si riduce ad un punto, di modulo pari a $20\text{Log}|K|$, e di fase pari a 0 se $K > 0$, $-\pi$ se $K < 0$;
- $G(s) = s^{-h}$: il diagramma è una retta parallela alle ordinate, di ascissa $-h\frac{\pi}{2}$;
- $G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$: il diagramma inizia con fase 0 e modulo 0db, e tende asintoticamente alla retta di fase $-\frac{\pi}{2}\text{sign}(\tau)$, con ampiezze sempre decrescenti e tendenti a 0 ($-\infty$ in db.);
- $G(s) = \tau s + 1$: il diagramma è analogo al precedente, ma ribaltato rispetto all'origine;
- $G(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\delta}{\omega_n}s + 1}$: Il diagramma inizia con fase 0 e ampiezza 0db, e tende asintoticamente alla retta di fase $-\pi\text{sign}(\tau)$, con ampiezze tendenti a 0 ($-\infty$ in db.). Le ampiezze sono sempre decrescenti per $\delta > \sqrt{2}/2$, altrimenti si ha un massimo (per $\omega = \omega_R$) di ampiezza M_R .
- $G(s) = \frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\delta}{\omega_n}s + 1$: il diagramma è analogo al precedente, ma ribaltato rispetto all'origine.

La somma dei contributi ai diagrammi di Nyquist deve essere ottenuta vettorialmente, sommando, pulsazione per pulsazione, i vettori che uniscono l'origine al punto $(\phi_1(j\omega), M_1(j\omega))$ col punto $(\phi_2(j\omega), M_2(j\omega))$ etc. Tale somma è meno agevole di quella fatta sul diagramma di Bode (in cui si sommano semplicemente le ordinate corrispondenti alle stesse ascisse). Inoltre, l'assenza di una significativa approssimazione asintotica al diagramma di Nichols ne rende l'uso meno immediato rispetto a quello di Bode.



12 Connessione di Sistemi

Nelle applicazioni dei sistemi di controllo molto spesso si incontrano sistemi dinamici connessi tra loro attraverso le loro “porte” di ingresso e uscita. I tre tipi fondamentali di connessioni sono la connessione in parallelo, in serie, ed in retroazione. Esaminiamo queste connessioni cercando di fornire rappresentazioni di un sistema dinamico equivalente, sia nello spazio di stato che utilizzando le funzioni di trasferimento.

Nella connessione in parallelo lo stesso ingresso eccita due sistemi Σ_1 e Σ_2 , le cui uscite si sommano e determinano l’uscita complessiva del sistema.

Scrivendo le realizzazioni nello spazio di stato dei due sistemi nella forma

$$\begin{cases} Dx_1 = A_1x_1 + B_1u \\ y_1 = C_1x_1 + D_1u \end{cases}, \begin{cases} Dx_2 = A_2x_2 + B_2u \\ y_2 = C_2x_2 + D_2u, \end{cases} \quad (31)$$

definiamo un nuovo vettore di stato $\bar{x} = (x_1 \ x_2)$.

Il sistema complessivo ha la seguente rappresentazione in forma di stato:

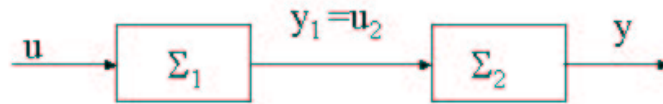
$$\begin{aligned} D\bar{x} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \bar{x} + (D_1 + D_2)u \end{aligned} \quad (32)$$

La funzione di trasferimento del sistema complessivo Σ é ottenuta semplicemente osservando che

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s)$$

quindi equivale alla somma delle funzioni di trasferimento dei sistemi connessi in parallelo: $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$.

Nella connessione in serie l’uscita del primo sistema costituisce l’ingresso del secondo. Scrivendo



$$\begin{cases} Dx_1 = A_1x_1 + B_1u \\ y_1 = C_1x_1 + D_1u \end{cases}, \begin{cases} Dx_2 = A_2x_2 + B_2y_1 \\ y_2 = C_2x_2 + D_2y_1 \end{cases} \quad (33)$$

e definendo ancora $\bar{x} = (x_1 \ x_2)$, il sistema complessivo é rappresentato in forma di stato da

$$\begin{aligned} D\bar{x} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{pmatrix} u \\ y &= \begin{pmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{pmatrix} \bar{x} + D_2D_1u \end{aligned} \quad (34)$$

La funzione di trasferimento del sistema complessiva Σ é invece semplicemente ottenuta da

$$Y(s) = Y_2(s) = G_2(s)U_2(s) = G_2(s)Y_1(s) = G_2(s)G_1(s)U(s)$$

quindi é pari al prodotto delle funzioni di trasferimento dei sistemi connessi in serie: $G(s) = G_1(s)G_2(s)$.

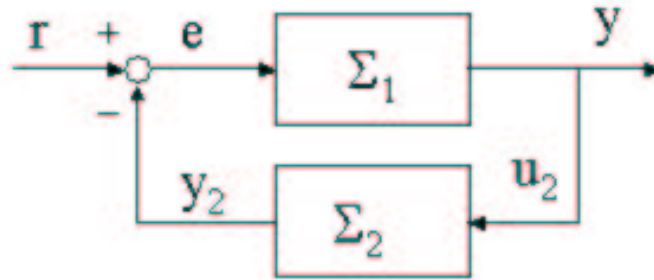
Nella connessione in retroazione l'ingresso del secondo sistema è l'uscita del primo, e viceversa. E' utile considerare in questo schema anche la funzione di un ulteriore ingresso, detto "di riferimento" $r(t)$, cui l'uscita del secondo sistema (quello detto "in retroazione") si sottrae a formare l'ingresso (detto segnale di "errore") del primo sistema (che viene detto "in catena diretta"). Si noti che la scelta dei segni al nodo sommatore e' puramente convenzionale, ma riflette il fatto che nella maggioranza delle applicazioni la retroazione è "negativa".

Scriviamo

$$\begin{cases} Dx_1 = A_1x_1 + B_1r - B_1y_2 \\ y_1 = C_1x_1 + D_1u \pm \end{cases}, \begin{cases} Dx_2 = A_2x_2 + B_2y_1 \\ y_2 = C_2x_2 + D_2y_1 \end{cases} \quad (35)$$

e definiamo ancora $\bar{x} = (x_1 \ x_2)$. Si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} Dx_1 = A_1x_1 - B_1C_2x_2 + B_1r - B_1D_2y \\ Dx_2 = A_2x_2 + B_2y \\ (1 + D_1D_2)y = C_1x_1 - D_1C_2x_2 + D_1r \end{cases}$$



da cui risulta che il sistema è ben posto solo se $D_1D_2 \neq -1$.

In tale ipotesi si ha

$$D\bar{x} = \begin{pmatrix} A_1 - \frac{B_1C_1D_2}{1+D_1D_2} & -B_1C_2 + \frac{B_1C_2D_1D_2}{1+D_1D_2} \\ B_2C_1\frac{1}{1+D_1D_2} & A_2 - \frac{B_2C_2D_1}{1+D_1D_2} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 - \frac{B_1D_1D_2}{1+D_1D_2} \\ B_2D_1\frac{1}{1+D_1D_2} \end{pmatrix} r$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1\frac{1}{1+D_1D_2} & -D_1C_2\frac{1}{1+D_1D_2} \end{pmatrix} \bar{x} + \frac{D_1}{1+D_1D_2}r$$

La situazione sinora descritta in massima generalità, che ammette che entrambe i sistemi siano propri ma non strettamente (abbiano cioè grado relativo nullo) creando così un cosiddetto “anello algebrico”, è comunque assai rara anche quando ammissibile. Il caso di gran lunga più frequente nelle applicazioni è quello in cui sia $D_1 = 0$, $D_2 \neq 0$, per cui si ha

$$D\bar{x} = \begin{pmatrix} A_1 - B_1C_1D_2 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} r \quad (36)$$

$$y = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \bar{x}$$

La funzione di trasferimento tra il riferimento e l'uscita del sistema in retroazione è ottenuta da $Y(s) = G_1(s)R(s) - G_1(s)G_2(s)Y(s)$ da cui

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}.$$

Nella f.d.t. di un sistema in retroazione, troviamo quindi a numeratore la f.d.t tra riferimento ed uscita in anello aperto, e a denominatore la f.d.t. dell'anello chiuso sommata ad uno.

12.1 Raggiungibilità e Osservabilità di Sistemi Connessi

Si supponga adesso che i sistemi Σ_1 e Σ_2 siano stati individualmente rappresentati in una forma minima, cioè i loro modelli nello spazio di stato siano sia raggiungibili che osservabili. Supporremo anche che le rappresentazioni con f.d.t. dei due sistemi siano ridotte ai minimi termini, cioè che per $G_1(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)}$ e $G_2(s) = \frac{n_2(s)}{d_2(s)}$, tutte le eventuali cancellazioni siano state effettuate, e i polinomi $n_i(s)$ e $d_i(s)$ siano primi tra loro. Ci chiediamo se tali proprietà possono essere alterate dalla connessione.

Parallelo.

Proposizione *Il sistema “parallelo” Σ è raggiungibile e osservabile se e soltanto se Σ_1 e Σ_2 non hanno modi comuni.*

Consideriamo dapprima la rappresentazione con f.d.t. della connessione. Si ha

$$G(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)} + \frac{n_2(s)}{d_2(s)} = \frac{n_1(s)d_2(s) + n_2(s)d_1(s)}{d_1(s)d_2(s)}$$

si può avere quindi una cancellazione se e solo se $d_1(s)$ e $d_2(s)$ hanno una radice in comune, cioè se i due sistemi hanno un polo in comune. In questo caso, la f.d.t. risultante può essere semplificata: pertanto, la rappresentazione in forma di stato sopra ottenuta, che usa tutti gli stati di Σ_1 e Σ_2 , non risulta più minima: si deve essere persa almeno una delle proprietà strutturali di raggiungibilità e/o di osservabilità.

È possibile stabilire che in realtà la cancellazione polo/zero che interviene per due sistemi in parallelo con un polo a comune implica che l'autovalore corrispondente perde *entrambe* le proprietà.

Infatti, per il lemma PBH la matrice

$$(sI - A|B) = \left[\begin{array}{cc|c} sI_1 - A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & sI_2 - A_2 & B_2 \end{array} \right] \quad (37)$$

valutata per s pari all'autovalore in comune, non può aver rango pieno (il rango del blocco a sinistra diminuisce di due, mentre il blocco a destra è una singola colonna). In modo del tutto analogo si procede per il caso duale della osservabilità:

$$\left[\begin{array}{c} sI - A \\ C \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} sI_1 - A_1 & 0 \\ 0 & sI_2 - A_2 \\ \hline C_1 & C_2 \end{array} \right] \quad (38)$$

Serie.

Proposizione *Il sistema “serie” Σ è raggiungibile se e solo se Σ_1 non ha zeri coincidenti con poli di Σ_2 ; osservabile se e solo se Σ_1 non ha poli coincidenti con zeri di Σ_2 .*

Nella rappresentazione con f.d.t. della connessione in serie, si ha

$$G(s) = \frac{n_1(s)}{d_1(s)} \frac{n_2(s)}{d_2(s)} = \frac{n_1(s)n_2(s)}{d_1(s)d_2(s)}$$

si può avere quindi una cancellazione se e solo se $n_1(s)$ e $d_2(s)$ hanno una radice in comune, ovvero se la hanno $n_2(s)$ e $d_1(s)$. In entrambe i casi, la f.d.t. risultante può essere semplificata: pertanto, una rappresentazione in forma di stato che usi tutti gli stati di Σ_1 e Σ_2 , non risulta più minima. Il fatto che nel primo caso si perda la raggiungibilità (dell’autovalore corrispondente al polo cancellato in $d_2(s)$) o la osservabilità (dell’autovalore corrispondente al polo cancellato in $d_1(s)$), si deduce dalla forma di stato con un procedimento laborioso anche se semplice.

Retroazione.

Proposizione *Il sistema “retroazionato” Σ è raggiungibile e osservabile se e solo se Σ_1 non ha zeri coincidenti con poli di Σ_2 . Non è completamente raggiungibile né osservabile altrimenti.*

Nella rappresentazione con f.d.t. della connessione in serie, si ha

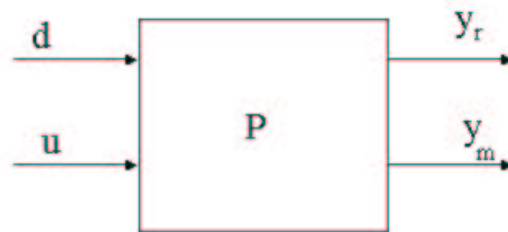
$$G(s) = \frac{n_1(s)d_2(s)}{d_1(s)d_2(s) - n_1(s)n_2(s)}.$$

Si può avere quindi una cancellazione se e solo se $n_1(s)$ e $d_2(s)$ hanno una radice in comune. Il fatto che l’autovalore corrispondente al polo cancellato divenga sia irraggiungibile che inosservabile, si può dedurre ancora lavorando sulla forma di stato.

13 Specifiche sui Sistemi Dinamici

Lo scopo del controllo dei sistemi dinamici è molto spesso quello di ottenere caratteristiche di funzionamento desiderate a fronte di condizioni di funzionamento non perfettamente predicibili.

La configurazione di un sistema dinamico con gli ingressi di controllo \mathbf{u} e di disturbo \mathbf{d} , e le uscite di riferimento \mathbf{y}_m e misurate \mathbf{y}_m , è riportata in figura.



Nel caso lineare, il sistema P sarà caratterizzato nello spazio di stato dalla matrice dinamica \mathbf{A} , dalla matrice degli ingressi di controllo \mathbf{B}_u e da quella dei disturbi \mathbf{B}_d , dalla matrice delle uscite di misura \mathbf{C}_m e di riferimento \mathbf{C}_r , e dalle quattro matrici di accoppiamento ingresso-uscita $\mathbf{D}_{u,m}$, $\mathbf{D}_{u,r}$, $\mathbf{D}_{d,m}$, $\mathbf{D}_{d,r}$.

Alternativamente, un sistema lineare può essere caratterizzato mediante le funzioni di trasferimento tra i diversi ingressi e le diverse uscite. In forma compatta, indicando le trasformate di Laplace di una variabile con la lettera maiuscola corrispondente, si avrà

$$\begin{bmatrix} Y_r(s) \\ Y_m(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ru}(s) & G_{rd}(s) \\ G_{mu}(s) & G_{md}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ D(s) \end{bmatrix}$$

dove naturalmente vale $G_{ru} = \mathbf{C}_r(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_u$, etc..

Ad esempio, si consideri il semplice modello di un asservimento di asse meccanico.

Il segnale a bassa potenza u viene amplificato in una corrente c da un azionamento elettrico che possiede una dinamica descritta da

$$\tau \dot{c} + c = Ku.$$

La corrente immessa nell'armatura di un motore in CC genera una coppia $K_m c$, che agisce sul carico meccanico secondo la legge

$$J\ddot{\theta} + f\dot{\theta} = K_m c + t$$

dove J , b sono l'inerzia e lo smorzamento meccanico all'asse del motore, e d è una coppia di disturbo (generata ad esempio dagli sforzi di taglio di un utensile). Se lo scopo del sistema è quello di ottenere un certo profilo temporale dalla posizione dell'asse, si dovrà considerare la posizione angolare dell'asse θ come uscita di riferimento. Per quanto riguarda le misure, si potranno avere casi diversi, nei quali siano misurabili la sola θ , o anche la velocità $\dot{\theta}$ e/o la corrente di armatura c .

Il modello nello spazio di stato di questo sistema si può dunque ottenere dal sistema delle due equazioni differenziali (di ordine uno e due, rispettivamente), ponendo ad esempio come stati $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$, e $x_3 = c$. Si avrà

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u u + \mathbf{B}_d t \\ \mathbf{y}_r &= \mathbf{C}_r \mathbf{x} \\ \mathbf{y}_m &= \mathbf{C}_m \mathbf{x}\end{aligned}$$

dove

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b}{J} & \frac{K_m}{J} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\tau} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K}{\tau} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix}$$

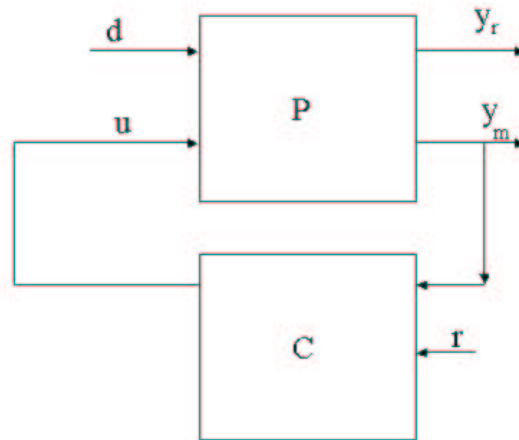
$$\mathbf{C}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Naturalmente, la matrice \mathbf{C}_m sopra scritta vale nel caso in cui tutte le grandezze sopra elencate fossero disponibili per la misura. La seconda e terza riga devono essere rimosse se si hanno solo misure di posizione dell'asse, cosa che assumiamo: pertanto, d'ora in poi, considereremo semplicemente $\mathbf{C}_m = \mathbf{C}_r$.

In termini di funzioni di trasferimento, considerando che l'uscita di posizione è allo stesso tempo uscita di riferimento e di misura, si può scrivere

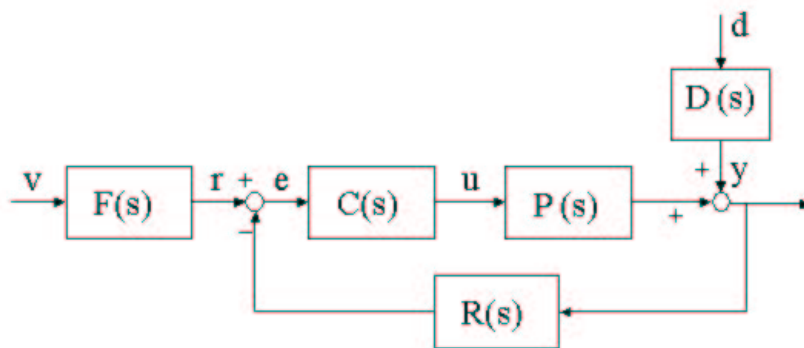
$$\begin{aligned}G_{ru}(s) = G_{mu}(s) &= \frac{KK_m}{s(\tau s+1)(Js+f)}; \\ G_{rd}(s) = G_{md}(s) &= \frac{1}{s(Js+f)}.\end{aligned}$$

In generale, il comportamento dinamico del sistema così come viene dato non soddisferà ai requisiti. Il problema del controllo sarà dunque quello di progettare un altro sistema, che diremo genericamente **controllore**, capace di usare le informazioni contenute nelle uscite misurate per determinare un ingresso di controllo opportuno, e tale che il sistema risultante dalla interconnessione verifichi le specifiche.



Nella figura, viene evidenziato anche il ruolo di un eventuale nuovo ingresso r al controllore, che può servire per far seguire al sistema desiderate traiettorie. Il controllore è in generale esso stesso un sistema dinamico, con un numero di stati n_c la cui scelta è uno degli obiettivi del progetto, il cui ingresso sono le uscite di misura del sistema, e la cui uscita viene usata come ingresso di controllo del sistema. Nel caso di un controllore lineare, questo può venire caratterizzato dalle matrici $\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}_c$, ovvero da una f.d.t. $C(s)$.

Nel caso frequente di sistemi SISO in cui l'uscita di misura e di riferimento coincidono, lo schema del sistema controllato può essere tracciato in qualche maggior dettaglio come riportato in figura



Il significato dei blocchi in figura è il seguente:

$P(s)$ indica la f.d.t. dell'impianto da controllare tra l'ingresso u e l'uscita y ;

$D(s)$ indica la f.d.t. tra il disturbo d e l'uscita y ;

$\mathbf{R}(s)$ è la f.d.t. della catena di reazione. Con questa f.d.t si può modellare la dinamica di trasduttori non istantanei (come ad esempio accelerometri, inclinometri, giroscopi, etc.). In alcuni casi, $R(s)$ può anche rappresentare un sistema dinamico per la compensazione che il progettista può intenzionalmente inserire in questo tratto dell'anello;

$\mathbf{C}(s)$ indica la f.d.t. del controllore, o compensatore, in catena diretta, il cui progetto è oggetto del nostro studio;

$\mathbf{F}(s)$ indica una f.d.t. di precompensazione, o di "azione in avanti" (*feedforward*), talvolta usata per adattare il riferimento esterno v al riferimento diretto r .

Nel caso dell'azionamento elettrico di un asse meccanico si ha ad esempio:

$$P(s) = \frac{KK_m}{s(\tau s + 1)(Js + f)}; \quad D(s) = \frac{1}{s(Js + f)}; \quad R(s) = 1.$$

13.1 Effetti della Retroazione

Lo schema di asservimento riportato sopra è utile per spiegare alcuni dei motivi che rendono spesso indispensabile l'adozione di meccanismi di controllo in retroazione.

Consideriamo dapprima la sensibilità della risposta del sistema alle difformità di comportamento delle componenti rispetto a quello nominale (problema della *robustezza* del sistema rispetto ad errori di modello). Per semplicità, modelliamo tali difformità come variazioni di un parametro significativo del modello (una massa, una lunghezza, etc.) rispetto ad un valore nominale, supponiamo che tale variazione sia piccola, ed esprimiamo la variazione del modello dinamico in termini relativi approssimandola al primo ordine. Per la f.d.t. dell'impianto $P(s)$, supposta dipendente da un parametro α_p con valore nominale $\hat{\alpha}_p$, si avrà

$$\frac{\Delta P(s)}{P(s)} \approx \left. \frac{\partial P(s, \alpha_p)}{\partial \alpha_p} \right|_{\hat{\alpha}_p} \frac{1}{P(s)} \frac{\Delta \alpha_p}{\hat{\alpha}_p}$$

Nel nostro esempio di azionamento, supponendo che la costante elettrica τ sia soggetta a piccole variazioni, si ottiene

$$\frac{\Delta P(s)}{P(s)} \approx \frac{-\tau s}{\tau s + 1} \frac{\Delta \tau}{\hat{\tau}}$$

Questo significa che, per segnali corrispondenti a valori di s piuttosto elevati in modulo (ad esempio, sinusoidi a pulsazioni piuttosto elevate con $s = j\omega$, $\omega \gg 1/\tau$), l'effetto sulla uscita delle variazioni parametriche è della stessa entità delle variazioni stesse.

Nel caso di variazioni sulla costante di coppia K_m del motore, si ha poi sensibilità totale:

$$\frac{\Delta P(s)}{P(s)} = \frac{\Delta K_m}{\hat{K}_m}.$$

Tale forte dipendenza dai valori effettivi dei parametri del modello è spesso inaccettabile nelle applicazioni.

Studiamo adesso l'effetto di variazioni di tal genere quando avvengono in un sistema chiuso in retroazione. A tal fine, scriviamo utilizzando le regole di composizione dei blocchi la f.d.t. in anello chiuso tra il riferimento esterno v e l'uscita y :

$$\frac{Y(s)}{V(s)} = G_c(s) = F(s) \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)R(s)}$$

Si verifica facilmente che in questo caso (omettendo la variabile complessa per brevità) si ottiene

$$\frac{\Delta G_c}{G_c} \approx \frac{1}{G_c} \frac{\partial G_c}{\partial P} \Delta P = \frac{1}{1 + CPR} \frac{\Delta P}{P}$$

Il fattore

$$S(s) = \frac{1}{1 + C(s)P(s)R(s)}$$

viene detto **funzione di sensibilità** dell'anello. Per riferimenti la cui trasformata ha poli in \bar{s} , tali che $1 + C(\bar{s})P(\bar{s})R(\bar{s}) \gg 1$, l'effetto delle variazioni parametriche è quasi completamente annullato nelle uscite.

Ad esempio, rispetto ad un ingresso a gradino sull'asservimento elettromeccanico, l'effetto della variazione di costante di coppia K_m viene ridotto dalla retroazione a

$$\frac{\Delta G_c(0)}{G_c(0)} = \frac{1}{1 + C(0)P(0)R(0)} \frac{\Delta K_m}{K_m} = 0$$

grazie al fatto che $P(s)$ possiede un polo nell'origine.

La funzione di sensitività dell'anello può essere interpretata anche come f.d.t. tra il riferimento interno r e l'errore e : per valori di s tali che $S(s)$ è piccola in modulo, l'errore dell'inseguimento di r da parte di y è piccolo.

È importante anche considerare la sensibilità della risposta del sistema in retroazione alle variazioni parametriche che possono occorrere in altri blocchi

del sistema in retroazione. Si ottiene facilmente che

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G_c}{G_c} &\approx \frac{1}{1+CPR} \frac{\Delta P}{P} \\ &+ \frac{1}{1+CPR} \frac{\Delta C}{C} \\ &+ \frac{\Delta F}{F} \\ &+ \frac{-CPR}{1+CPR} \frac{\Delta R}{R} \end{aligned}$$

Se ne deduce che:

- l'effetto delle variazioni nei parametri del controllore è identico a quello dei parametri dell'impianto;
- l'effetto delle variazioni di parametri del precompensatore non sono mitigati dalla retroazione (in quanto l'anello non è chiuso attorno alla fonte della incertezza). I precompensatori sono quindi elementi critici, da usarsi con cautela: vengono usati prevalentemente per traslare i riferimenti esterni v a livelli compatibili con i riferimenti interni r .
- l'effetto delle variazioni di parametri del sensore o del compensatore in retroazione è legato alla **funzione di sensitività complementare** $\bar{S}(s) = \frac{C(s)P(s)R(s)}{1+C(s)P(s)R(s)} = 1 - S(s)$. Tale effetto è quindi elevato laddove è piccola la sensitività, e viceversa.

Il terzo punto è cruciale nel progetto dei sistemi di controllo. Esso esprime in sostanza il fatto che i vantaggi offerti dalla retroazione sono indissolubilmente legati alla disponibilità di sensori, la cui accuratezza è indispensabile. Laddove il sensore disponibile fosse più inaccurato dell'impianto stesso, sarebbe addirittura preferibile usare il sistema in anello aperto.

Il compromesso tra le due funzioni di sensitività si trova spesso nel campo delle frequenze. La maggioranza dei sensori in uso negli asservimenti sono sufficientemente accurati nella misura di grandezze variabili lentamente, e perdono accuratezza quando le variazioni diventano più veloci. Si osserva d'altronde che, per impianti strettamente causali, si ha $P(s) \rightarrow 0$ quando $|s| \rightarrow \infty$. Per segnali di frequenza sufficientemente alta, quindi, si ottiene tipicamente $1 \gg C(s)P(s)R(s)$, quindi $S(s) \approx 1$, e $\bar{S}(s) \approx 0$. Il progetto accurato di $C(s)$ può fare in modo che le due opposte esigenze si incontrino nella zona di frequenze più opportuna.

Si consideri adesso la sensibilità della risposta del sistema ai disturbi. Nel caso di anello aperto, si ha

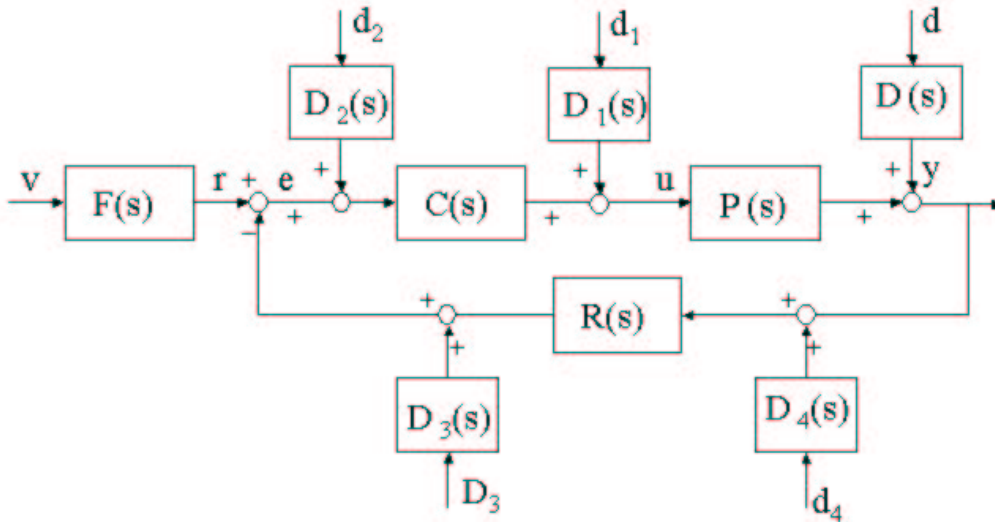
$$Y(s) = P(s)u(s) + D(s)d(s)$$

mentre in anello chiuso si ottiene

$$Y(s) = \frac{F(s)C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)R(s)}u(s) + \frac{D(s)}{1 + C(s)P(s)R(s)}d(s)$$

Si osserva che la sensibilità al disturbo è ridotta di un fattore pari alla funzione di sensitività dell'anello $S(s)$: i disturbi a pulsazioni in cui $S(s)$ è piccola vengono efficacemente attenuati dalla retroazione. Conoscendo una stima del tipo di segnali di disturbo da attendersi in un sistema, è quindi possibile progettare il controllore $C(s)$ (ed eventualmente la parte di compensazione in $R(s)$) in modo da avere adeguata immunità.

È utile osservare l'effetto dei disturbi sui sistemi in retroazione in maggior dettaglio, in relazione alle possibili localizzazioni del punto di ingresso del disturbo. Si consideri quindi



Si ha facilmente che

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{F(s)C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)R(s)}u(s) \\
 &+ \frac{D(s)}{1+C(s)P(s)R(s)}d(s) \\
 &+ \frac{D_1(s)P(s)}{1+C(s)P(s)R(s)}d_1(s) \\
 &+ \frac{D_2(s)C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)R(s)}d_2 \\
 &+ \frac{-D_3(s)C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)R(s)}d_3 \\
 &+ \frac{-D_4(s)R(s)C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)R(s)}d_4
 \end{aligned}$$

da cui è facile vedere come la immunità al disturbo è via via diminuita, muovendosi a ritroso nell'anello, rispetto alla funzione di sensitività per un fattore pari alla f.d.t. in anello diretto tra il punto di inserimento del disturbo e l'uscita. La f.d.t. tra il disturbo di misura d_4 e l'uscita y è pari alla funzione di sensitività complementare: è nulla nel caso di anello aperto, ed è massima (sensibilità totale) quando il guadagno di anello è elevato. Questo conferma

il principio sopra delineato per cui la retroazione è valida solo in quanto i sensori sono affidabili.

Un caso particolarmente interessante è quello in cui i disturbi considerati siano costanti, ad esempio di ampiezza unitaria $D_i(s)d_i(s) = 1/s$. Affinchè l'effetto di un tale disturbo sulla uscita a regime del sistema possa venir compensato completamente dalla retroazione, è necessario (per il teorema del valore finale) che la f.d.t. che lega il disturbo alla uscita si annulli per $s = 0$. È quindi facile osservare dalle espressioni precedenti che ciò è possibile solo quando una delle f.d.t. *a monte* del punto d'ingresso del disturbo (considerando di percorrere l'anello in senso orario) contiene un polo nell'origine.

13.2 Specifiche di Stabilità

La più comune delle specifiche dinamiche riguarda la *stabilità* del sistema nell'intorno di un punto o di una traiettoria di equilibrio che descrive il suo comportamento nominale. Questo requisito discende dalla necessità di garantire che il sistema, per lo meno nella sua evoluzione libera, sia in grado di mantenere limitate le escursioni delle grandezze fisiche che sono coinvolte nella sua dinamica quando le condizioni iniziali non siano esattamente quelle nominali. Oltre alla stabilità si richiede in molte applicazioni la attrattività dell'equilibrio (quindi la *asintotica stabilità*). In pratica, poi, è spesso necessario quantificare quest'ultima proprietà con riguardo a due aspetti fondamentali:

- la estensione della R.A.S. di un equilibrio, che è un indice di robustezza del sistema rispetto a perturbazioni dello stato iniziale;
- la velocità di convergenza del sistema all'equilibrio.

Nei sistemi lineari, sappiamo che la A.S. di un equilibrio comporta la sua G.A.S.: pertanto la prima specifica di cui sopra sarà da verificarsi solo in relazione a sistemi nonlineari. È importante ricordare a questo proposito che, per sistemi NL la cui stabilità sia stata studiata col metodo indiretto di Lyapunov, la stima della RAS in condizioni effettive è possibile utilizzando il teorema di Ljapunov con funzioni candidate ottenute dalla soluzione della equazione di Lyapunov per il sistema linearizzato approssimato.

Per la seconda specifica, invece, sappiamo che solo i sistemi nonlineari che siano asintoticamente stabili nella loro prima approssimazione sono anche esponenzialmente stabili, e la loro velocità di convergenza coincide con quella del linearizzato. Pertanto, questa specifica può essere studiata completamente nel campo lineare.

Per un sistema lineare, la velocità di convergenza è determinata dal più lento dei modi del sistema: cioè dall'autovalore a parte reale massima (più vicino all'asse immaginario) in TC, o a modulo massimo (più vicino al cerchio unitario) in TC.

14 Studio Indiretto dei Sistemi in Retroazione

Ci occuperemo ora di studiare come le proprietà specificate di un sistema sono alterate quando questo viene chiuso in retroazione. Tra queste, si considereranno in particolare la stabilità ed i relativi margini di robustezza, la banda passante, la pulsazione ed il picco di risonanza, il tempo di assestamento e la sovraelongazione.

È ovvio che, in linea di principio, lo studio di un sistema retroazionato non comporta difficoltà maggiori di un sistema in anello aperto: basterebbe infatti applicare le definizioni o i criteri usati per l'anello aperto al modello del sistema in anello chiuso, che è ottenuto in modo assai semplice.

Ad esempio, ai fini dello studio della stabilità di un sistema con f.d.t. in anello aperto $G(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ quando chiuso in retroazione negativa unitaria, basterebbe considerare la f.d.t. $G_c(s) = \frac{n(s)}{d(s)+n(s)}$, quindi -ad esempio- applicare il criterio di Routh al polinomio $d(s) + n(s)$.

Il nostro scopo è però diverso. Piuttosto che studiare le proprietà in anello chiuso di un particolare sistema, si vuole infatti studiare come le modifiche del sistema in anello aperto alterano le proprietà del sistema in anello chiuso. Sarà spesso necessario, nel progetto dei controllori, ricorrere a procedure iterative di modifica e verifica. Per tale studio sarà utile disporre di criteri di immediata applicabilità, anche a costo di una certa approssimazione.

14.1 Stabilità dei Sistemi in Retroazione - Criterio di Nyquist

Lo studio della stabilità di sistemi lineari in anello aperto è legato all'analisi della matrice dinamica della sua rappresentazione in forma di stato, ovvero dei poli della sua rappresentazione come f.d.t..

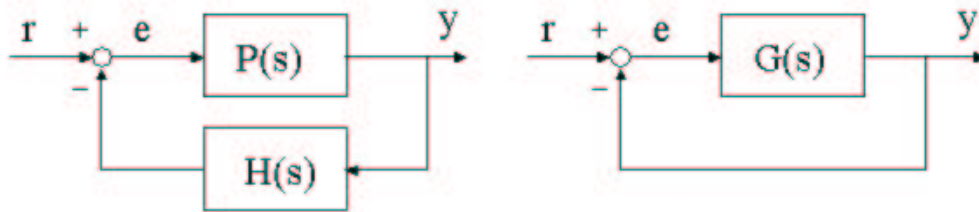
Tra i metodi visti per compiere questa analisi, oltre al calcolo esplicito o numerico delle radici del polinomio caratteristico, si ricordano i criteri di Routh-Hurwitz e Jury, i teoremi di Gershgorin e di Kharitonov per i sistemi incerti, l'equazione di Lyapunov. Si ricorda infine il criterio dell'indice logaritmico, o criterio di Mikhailov, che pur non fornendo risposte numericamente precise, ha una immediata interpretazione grafica che lo rende particolarmente utile per quanto segue.

Il criterio di Nyquist è un criterio grafico che, sulla base dello studio del diagramma polare *completo* di una f.d.t. $G(s)$, fornisce indicazioni precise sul numero di poli instabili della f.d.t. $G_c(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ ottenuta ponendo il sistema in retroazione negativa unitaria.

L'ipotesi di retroazione unitaria negativa non è limitante in quanto molte

configurazioni di sistemi in retroazione possono essere ricondotte in questa forma.

Se ad esempio si desidera studiare la stabilità in retroazione del sistema a destra nella figura sottostante,



si può far riferimento allo schema riportato a destra, dove si ponga $G(s) = P(s)H(s)$, ed applicare quindi il criterio di Nyquist al diagramma polare della $G(s)$.

Si forniscono nel seguito due versioni del criterio di Nyquist, di cui la prima è di più facile applicazione e dimostrazione, ma limitata generalità, mentre la seconda è pienamente generale.

Criterio di Nyquist *Dato un sistema avente una funzione di trasferimento $G(s)$ priva di poli immaginari puri, condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema $G_c(s)$ in retroazione negativa unitaria sia asintoticamente stabile, è che il diagramma polare completo della $G(s)$ circonda in senso antiorario il punto $(-1 + j0)$ tante volte quanti sono i poli con parte reale positiva della $G(s)$.*

Si dice *completo* il diagramma di $G(s)$ ottenuto per $s = j\omega$ con $\omega \in (-\infty, +\infty)$. Per determinare $G(-j\omega)$ osserviamo che se $G(j\omega) = R(j\omega) + jI(j\omega)$, allora $G(-j\omega) = R(j\omega) - jI(j\omega)$. Per disegnare il diagramma completo è quindi sufficiente ribaltare il diagramma di Nyquist rispetto all'asse reale.

Come caso particolare del criterio sopra esposto, si ha che nel caso in cui la $G(s)$ sia priva di poli instabili, il diagramma polare completo non deve circondare né toccare il punto critico.

Dimostrazione del Criterio di Nyquist.

Data la funzione di trasferimento ad anello aperto

$$G(s) = \frac{n(s)}{d(s)},$$

si verifica immediatamente che, una volta posta in retroazione, i poli del sistema asservito coincidono con le radici del polinomio $d^*(s) = n(s) + d(s)$.

Applicando al polinomio $d^*(s)$ il criterio di Mikhailov, otteniamo che la rotazione del vettore $d^*(j\omega)$, per ω che varia da 0 a $+\infty$, attorno all'origine risulta

$$\phi_c = \frac{\pi}{2}(n_c - 2r_c),$$

dove n_c è pari al grado del polinomio $d^*(s)$ e r_c è pari al numero delle radici a parte reale positiva di $d^*(s)$ (radici instabili in anello chiuso).

Se ipotizziamo ω variare da $-\infty$ a $+\infty$, si ottiene un numero di rotazioni attorno all'origine del vettore $d^*(s)$ pari al doppio del precedente, cioè

$$\phi_c = \pi(n_c - 2r_c).$$

Ritornando alla funzione di trasferimento ad anello aperto $G(s)$, se applichiamo il criterio di Mikhailov al vettore $d(j\omega)$, risulta invece:

$$\phi_a = \pi(n_a - 2r_a).$$

Data l'espressione della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

$$W(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)},$$

si nota che la rotazione ψ del vettore $1 + G(j\omega)$ attorno all'origine risulta pari alla rotazione del vettore $G(j\omega)$ attorno al punto $-1 + j0$ e risulta pari a

$$\psi = \phi_c - \phi_a = \pi(n_c - 2r_c) - \pi(n_a - 2r_a) = \pi(n_c - n_a) + 2\pi(r_a - r_c).$$

Poiché nei sistemi asserviti il grado del denominatore ad anello chiuso coincide con il grado del denominatore ad anello aperto (per la causalità di $G(s)$), $\deg(n(s) + d(s)) = \deg(d(s))$, si ottiene:

$$\psi = 2\pi(r_a - r_c),$$

da cui si ottiene:

$$r_c = r_a - \frac{\psi}{2\pi}.$$

Quindi, il numero di poli instabili del sistema ad anello chiuso coincide con il numero dei poli instabili del sistema ad anello aperto $G(s)$, meno il numero di rotazioni (contate con il loro segno) che il vettore $G(j\omega)$ compie attorno al punto $-1 + j0$. L'ultima considerazione rappresenta il criterio di stabilità di Nyquist.

Nel caso in cui si la $G(s)$ presenti singolarit  sull'asse immaginario il teorema di Nyquist si applica ancora, con l'accortezza di considerare anche le rotazioni di π ("mezzi giri"):

Il sistema in retroazione   asintoticamente stabile se e solo se il diagramma polare della $G(j\omega)$, tracciato per $\omega \in (-\infty, +\infty)$, compie attorno al punto $-1 + j\omega$ tanti giri in senso antiorario quanti sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva, e tanti mezzi giri in senso antiorario quanti sono i poli immaginari puri.

14.2 Esempio

Data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6},$$

avente come poli $\{-1, -2, -3\}$, tracciamo il diagramma polare completo come in figura 1.

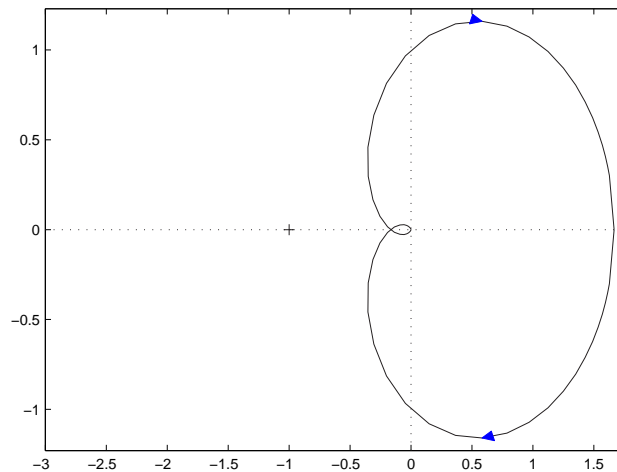


Figure 1: Diagramma polare completo

Il diagramma non circonda n  tocca il punto critico quindi per il criterio di Nyquist il sistema completo in retroazione   asintoticamente stabile.

Assegnata la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{s + 1}{s^2 + \frac{1}{2}s + 1},$$

avente il seguente diagramma di Nyquist,

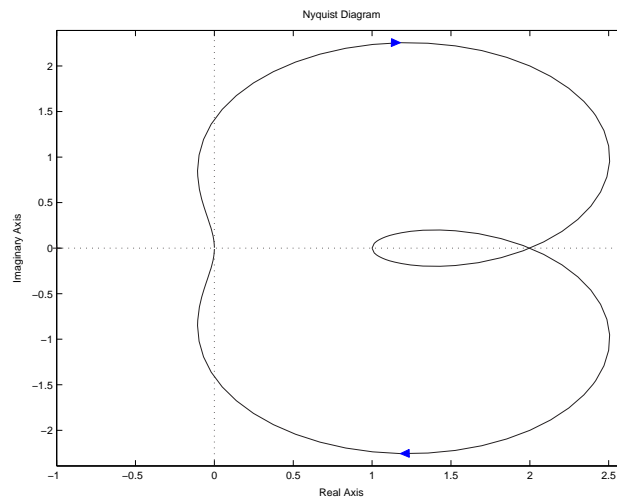


Figure 2: Diagramma di Nyquist

si nota che il punto $(-1 + j0)$ non é ne toccato né circondato, pertanto il sistema complessivo é asintoticamente stabile.

Data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{2s(s^2 + s + 1)},$$

avente il seguente diagramma di Nyquist,

si nota che, non avendo il guadagno di anello poli instabili ma un polo nell'origine, non essendo il punto $(-1 + j0)$ né ne toccato né circondato e visto che si compie un mezzo giro in senso antiorario (per via del polo nell'origine), il sistema complessivo é asintoticamente stabile.

Data la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + s + 1)},$$

avente il seguente diagramma di Nyquist,

si nota che intorno al punto $(-1 + j0)$ si compie sempre un giro in senso orario e pertanto il sistema complessivo é instabile.

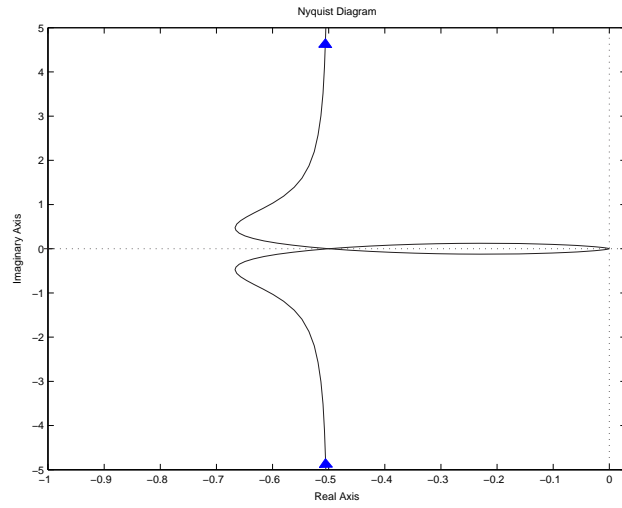


Figure 3: Diagramma di Nyquist

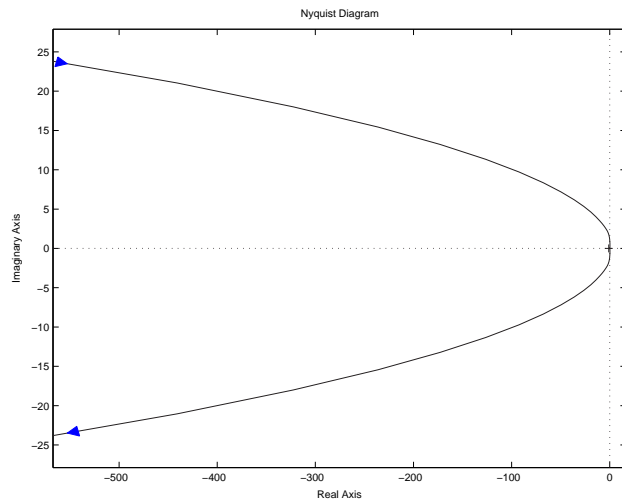


Figure 4: Diagramma di Nyquist

15 Regolazione dei sistemi

Si è visto in passato che la retroazione degli stati sugli ingressi $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)$ è in grado di allocare arbitrariamente tutti gli autovalori interni al sottospazio raggiungibile. Difficilmente però nei casi pratici lo stato è noto direttamente: l'informazione sullo stato disponibile al progettista del sistema di controllo è infatti contenuta nelle uscite, e in particolare in quelle di misura. Queste, in numero di p in un sistema MIMO, sono in generale insufficienti a determinare lo stato (che ha dimensione n) direttamente, essendo in ogni caso pratico $p < n$.

L'utilizzo di una retroazione statica delle sole uscite per il controllo, cioè la sintesi di un controllore del tipo $\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}'\mathbf{y}(t) + \mathbf{v}(t)$, può essere talvolta usata utilmente. Nel caso generale, però, i gradi di libertà del progetto (che sono gli elementi della matrice \mathbf{K}' , in numero di mp) sono insufficienti ad ottenere comportamenti adeguati alle specifiche. Nel caso SISO, ad esempio, la retroazione delle uscite è specificata dalla scelta di un solo scalare: al variare di \mathbf{K} , la posizione di ciascun autovalore (del sottosistema osservabile e raggiungibile) descrive una varietà unidimensionale, cioè una curva nel piano complesso, detta *luogo delle radici*.

Gli autovalori esterni al sottospazio raggiungibile e interni a quello inosservabile sono invece fissi. I primi sono fissi anche per retroazione dello stato, di cui la retroazione delle uscite è solo un caso particolare ($\mathbf{K} = \mathbf{K}'\mathbf{C}$).

Per mostrare che anche gli autovalori del sottosistema inosservabile sono fissi con la retroazione delle uscite, basta applicare la reazione $\mathbf{u} = \mathbf{K}'\mathbf{C}\mathbf{x}$ al sistema nella base canonica di Kalman, e osservare che in quella base vale

$$\mathbf{BK}'\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{RO}\mathbf{K}'\mathbf{C}_{RO} & \mathbf{0} & \star & \mathbf{0} \\ \star & \mathbf{0} & \star & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

che, sommata alla matrice \mathbf{A} , ne lascia inalterata la struttura triangolare a blocchi, e ne altera unicamente gli autovalori corrispondenti al blocco $\mathbf{A}_{RO} + \mathbf{B}_{RO}\mathbf{K}'\mathbf{C}_{RO}$.

Si è però anche visto che, se il sistema è osservabile, è possibile ottenere una stima dello stato iniziale, e da questa, per soluzione esplicita del sistema, lo stato attuale al tempo t , che è quanto serve per calcolare la retroazione.

Questo procedimento non è però spesso praticabile per due principali motivi:

1. per la complicazione del calcolo numerico necessario a ottenere la stima dello stato iniziale;

2. per la sensibilità che la ricostruzione dello stato finale a partire da quello iniziale e dalla conoscenza degli ingressi mostra agli errori di stima dello stato iniziale, tanto maggiori quanto più è lungo il tempo per il quale si deve integrare il modello.

15.1 Osservatore asintotico dello stato

Si procede dunque con un altro approccio, quello di costruire un altro sistema dinamico i cui stati replichino, quanto meglio possibile, quelli del sistema originale. Questo sistema può essere costruito artificialmente, ad esempio con un circuito elettronico analogico o, come nella grande maggioranza dei casi, in un computer. I nuovi stati saranno accessibili alla misura e quindi utilizzabili nella retroazione. Si consideri ad esempio il problema di stimare lo stato \mathbf{x} di un sistema LTI con matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ mediante il sistema

$$D\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

Evidentemente, se lo stato iniziale del sistema da osservare fosse noto esattamente, lo stato $\hat{\mathbf{x}}$ dell'osservatore sarebbe una copia esatta dello stato ignoto \mathbf{x} . Altrimenti, l'errore di stima, rappresentato dal vettore $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, è soggetto ad una evoluzione dinamica data da

$$D\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{x}(0) - \hat{\mathbf{x}}(0)$$

quindi completamente fissata dalla dinamica del sistema da osservare, cosa che in generale non è accettabile.

La dinamica dell'errore di stima può essere modificata utilizzando la conoscenza delle uscite, che non è stata ancora sfruttata. In particolare, si può modificare la dinamica dello stato stimato sommandovi un termine proporzionale alla differenza tra l'uscita effettiva del sistema e quella che si ottiene dallo stato stimato:

$$D\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{G}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}})$$

La matrice $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ si dice di *iniezione* delle uscite sugli stati. La dinamica dell'errore è in questo caso data da

$$D\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{e} + \mathbf{G}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{e}$$

e quindi è influenzata dalla scelta di \mathbf{G} .

In che misura si possa riuscire a modificare la posizione degli autovalori della matrice \mathbf{A} mediante iniezione delle uscite dipende dalla proprietà di

osservabilità della coppia (\mathbf{A}, \mathbf{C}) . Infatti, avendosi

$$\det(p\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}) = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})^T = \det(p\mathbf{I} - \mathbf{A}^T - \mathbf{C}^T\mathbf{G}^T)$$

i coefficienti del polinomio caratteristico di $(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})$ possono essere scelti a piacimento se $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ è raggiungibile, ovvero (per dualità), se (\mathbf{A}, \mathbf{C}) è osservabile.

Quando possibile, gli autovalori di $(\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})$ sono allocati ad arbitrio semplicemente seguendo la procedura di allocazione degli autovalori per un sistema $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ e ponendo $\mathbf{G} = \mathbf{K}^T$. Se invece esiste un sottosistema non osservabile, i suoi autovalori non sono alterati dalla iniezione delle uscite, restando fissi. La possibilità di ottenere quindi un osservatore i cui stati convergano asintoticamente a quelli da stimare dipende dalla stabilità degli autovalori interni al sottospazio di inosservabilità. Un sistema il cui sottosistema inosservabile è asintoticamente stabile si dice *detettabile*. Nel caso TD, se gli autovalori del sottosistema inosservabile sono tutti in zero, è possibile costruire un osservatore dead-beat, per il quale cioè l'errore di stima si annulla in un numero finito di passi (minore o uguale alla dimensione del sistema), a partire da qualsiasi errore iniziale.

La costruzione di un osservatore come quello sopra descritto, detto anche *osservatore identità*, non è l'unica soluzione possibile. In particolare, si consideri che, disponendo direttamente delle p combinazioni lineari degli stati che formano le uscite, è in effetti necessario solamente stimare altre $n - p$ combinazioni indipendenti da queste per poter ottenere tutti gli stati. Un tale osservatore si dice *osservatore ridotto*.

15.2 Realizzazione di sistemi

Il problema della trasformazione di un modello ingresso-uscita di un sistema in forma di stato è stato già affrontato alcune volte in passato, in relazione alla trasformazione delle forme normali in forma di stato. Il problema è importante perchè, nonostante le tecniche di regolazione, di identificazione, e di controllo ottimo siano risolte nel modo più semplice nello spazio di stato, spesso il modello del sistema a nostra disposizione è dato da una relazione ingresso-uscita. A questo problema si dà il nome di problema della realizzazione.

Si è visto in particolare come per i sistemi SISO LTI sia possibile facilmente, a partire da una funzione di trasferimento, ottenere due realizzazioni

che garantiscono rispettivamente la raggiungibilità e la osservabilità. Si è anche già visto che, dato un sistema nello spazio di stato, solo gli autovalori del sottosistema raggiungibile ed osservabile sono poli della f.d.t. corrispondente.

Ci chiediamo ora quale sia il più piccolo numero di stati che possa essere utilizzato per realizzare una data f.d.t. SISO. Iniziamo dal considerare che la f.d.t. che esprime un dato rapporto ingresso/uscita non è unica. Infatti, si consideri ad esempio il sistema in forma normale

$$y(t+2) + 2y(t+1) + y(t) = u(t+1) + u(t)$$

con condizioni iniziali $y(0) = y(1) = 0$, cui corrisponde una rappresentazione nell'operatore z del tipo

$$(z^2 + 2z + 1)Y(z) = (z + 1)U(z)$$

ovvero una f.d.t. $G(z) = \frac{z+1}{(z+1)^2}$.

Confrontando il precedente al sistema

$$y(t+1) + y(t) = u(t)$$

con condizioni iniziali $y(0) = 0$, si ottiene che le evoluzioni dei due sistemi sono coincidenti per qualsiasi sequenza di ingresso, quindi sono equivalenti. Al secondo sistema corrisponde la f.d.t. $G(z) = \frac{1}{z+1}$, eguale alla precedente eccetto che per la semplificazione tra i fattori comuni a numeratore e denominatore.

Dato un rapporto ingresso-uscita LTI, esiste una e una sola rappresentazione in termini di f.d.t. che abbia grado minimo e coefficiente unitario della potenza più alta della variabile complessa (che indicheremo con p) a denominatore. Una tale f.d.t., che può essere ottenuta semplicemente mediante divisione di polinomi, si dirà ridotta ai minimi termini o *coprime*.

Diremo che un sistema LTI descritto dalle sue matrici $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ è una realizzazione della m.d.t. $\mathbf{G}(p)$ se vale

$$\mathbf{G}(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Una realizzazione $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ nello spazio di stato si dice *minima* se qualsiasi altra realizzazione $(\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}')$ che dà luogo alla stessa f.d.t. *coprime*, ha numero di stati uguale o superiore. Una realizzazione è minima solo se è completamente raggiungibile ed osservabile. Se così non fosse, infatti, il sistema

$$(\mathbf{A}_{RO}, \mathbf{B}_{RO}, \mathbf{C}_{RO}, \mathbf{D})$$

, che realizza la stessa f.d.t. a meno di cancellazioni polo-zero, avrebbe numero di stati inferiore.

Una realizzazione di una data f.d.t. non può avere dimensione inferiore al numero di poli della f.d.t. stessa (si ricordi che i poli sono un sottoinsieme degli autovalori). Pertanto, una realizzazione in forma canonica di controllo di un sistema SISO descritto da una f.d.t. coprima, è minimo, quindi anche osservabile. Vale il viceversa per una realizzazione in forma canonica di osservazione.

Se si applica la costruzione delle forme canoniche ad una f.d.t. non coprima, si otterranno invece delle realizzazioni raggiungibili ma non osservabili, ovvero osservabili ma non raggiungibili, quindi non minime.

Ogni realizzazione minima di una f.d.t. è algebricamente equivalente ad ogni altra, cioè esiste una matrice di trasformazione di coordinate che le lega. Le formule esplicite per il calcolo di tale cambiamento di base utilizzano le matrici di raggiungibilità o osservabilità dei due sistemi, e sono già state viste in passato.

Così come la retroazione degli stati non altera la raggiungibilità di un sistema, la iniezione delle uscite non ne altera la osservabilità (la dimostrazione è analoga, e può essere fatta ad esempio per dualità). Al contrario, la retroazione degli stati può alterare la osservabilità, e la iniezione delle uscite può alterare la raggiungibilità.

Si noti in particolare che la retroazione degli stati sposta la posizione degli autovalori interni al sottospazio di raggiungibilità, e quindi anche di quelli tra questi esterni al sottospazio di inosservabilità, cioè quelli che coincidono con i poli della f.d.t. corrispondente. Dalla forma canonica di raggiungibilità applicata al sottosistema raggiungibile e osservabile, in cui i coefficienti del polinomio degli zeri appaiono nella matrice \mathbf{C} , si osserva che la retroazione lascia invariati gli zeri della f.d.t.. È quindi possibile che i poli vengano spostati in modo che uno o più tra loro venga a coincidere con uno o più zeri, dando così luogo ad una cancellazione: in tal caso, il sistema realizzato in forma di controllo non sarebbe più di dimensione minima, il che implica che si sia persa la osservabilità.

In modo analogo, si consideri il (sotto)sistema raggiungibile e osservabile in forma canonica di osservazione $(\mathbf{A}_o, \mathbf{B}_o, \mathbf{C}_o, \mathbf{D}_o)$, e si proceda ad una iniezione delle uscite sugli stati, cioè

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_o \mathbf{x} + \mathbf{B}_o \mathbf{u} + \mathbf{G} \mathbf{C}_o \mathbf{x} = (\mathbf{A}_o + \mathbf{G} \mathbf{C}_o) \mathbf{x} + \mathbf{B}_o \mathbf{u}$$

Anche in questo caso, gli autovalori di \mathbf{A}_o , cioè i poli della f.d.t. corrispondente, sono spostati ad arbitrio dalla retroazione, mentre gli zeri restano fissi (i coefficienti del polinomio degli zeri sono in \mathbf{B}_o). Se qualche coppia polo/zero si cancella, la realizzazione non è più minima, nel qual caso la proprietà venuta a mancare non può che essere la raggiungibilità.

Si dice *grado relativo* di una f.d.t. SISO la differenza tra il grado del denominatore e quello del numeratore, ovvero tra il numero dei poli (n) e quello degli zeri (m):

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + s^n}$$

Per il grado relativo $n - m = r$ di un sistema proprio vale $r \geq 0$; se strettamente proprio, $r > 0$.

Il grado relativo ha una diretta interpretazione fisica nei sistemi TD: esso rappresenta il tempo (numero di istanti) dopo il quale si manifesta nella uscita l'effetto dell'ingresso. Si ricordi infatti che (per $\mathbf{D} = 0$) vale

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(0) \\ \mathbf{y}(1) &= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) \\ \mathbf{y}(2) &= \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(0) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}(1) \\ &\vdots = \vdots \end{aligned}$$

e si consideri per il sistema una realizzazione in forma canonica di controllo: si osserva che

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{C}\mathbf{B} \quad \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \right] &= \mathbf{C}\mathbf{R} = \\ &= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \star \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \star \\ 0 & 1 & -a_{n-1} & \dots & \star \\ 1 & -a_{n-1} & -a_{n-2} + a_{n-1}^2 & \dots & \star \end{array} \right] \end{aligned}$$

quindi che $\mathbf{C}\mathbf{B} = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} = \dots = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-m-1}\mathbf{B} = 0$, mentre $\mathbf{C}\mathbf{A}^{(n-m)}\mathbf{B} = b_m \neq 0$.

Nel caso TC, il grado relativo rappresenta il numero di volte per il quale si deve derivare l'uscita prima che l'ingresso appaia esplicitamente nella sua espressione. Infatti si ha adesso che (per $\mathbf{D} = 0$) vale

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(0)} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{y}^{(1)} &= \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(0)} \\ \mathbf{y}^{(2)} &= \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}^{(1)} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

15.3 Sintesi del regolatore

Avendo da un osservatore una stima $\hat{\mathbf{x}}$ dello stato presente, che asintoticamente converge al valore vero, si può pensare di utilizzarla per il calcolo della retroazione dello stato al posto dello stato inaccessibile \mathbf{x} . Si realizza in questo modo un sistema a $2n$ stati (se si usa un osservatore identità), con la struttura (nel caso strettamente proprio)

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ D\hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{G}(\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{v} \end{aligned}$$

ovvero, sostituendo le espressioni del controllo e della uscita, e calcolando la dinamica dell'errore $D\mathbf{e} = D\mathbf{x} - D\hat{\mathbf{x}}$,

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{v} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ D\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{G}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ D\mathbf{e} &= (\mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C})\mathbf{e} \end{aligned}$$

La dinamica del sistema completo può essere scritta quindi in forma di stato aggregato:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D\mathbf{x} \\ D\mathbf{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} & | & -\mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & | & \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & | & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento di questo sistema con $2n$ stati è data da

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(p) &= \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} & | & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (p\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1} & | & \star \\ \mathbf{0} & | & (p\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{B} \end{aligned}$$

quindi coincide con quella ottenuta dalla retroazione degli stati effettivi: l'utilizzo degli stati stimati non ha effetti da questo punto di vista.

Gli autovalori del sistema con regolatore sono poi dati dalle radici del polinomio caratteristico

$$\det \left(\left[\begin{array}{c|c} p\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK} & \mathbf{BK} \\ \hline \mathbf{0} & p\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{GC} \end{array} \right] \right) = \\ = \det (p\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK}) \det (p\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{GC})$$

quindi sono l'unione degli autovalori del sistema regolato (nelle posizioni allocate dalla scelta di \mathbf{K}) e degli autovalori dell'osservatore (nelle posizioni allocate dalla scelta di \mathbf{G}): questo risultato, per nulla ovvio a priori, va sotto il nome di *proprietà di separazione*, e garantisce che l'allocazione dei poli dell'osservatore e del sistema retroazionato possono essere fatte indipendentemente l'una dall'altra. Ciò vale anche nel caso in cui si usino osservatori ridotti anziché identità.

Il sistema globale (sistema originale + regolatore) può essere dunque reso asintoticamente stabile se la coppia (\mathbf{A}, \mathbf{B}) è stabilizzabile, e la coppia (\mathbf{A}, \mathbf{C}) è detettabile. In TD, si può costruire un regolatore dead-beat che porti lo stato a zero in un numero finito di passi se e solo se tutti gli autovalori esterni al sottospazio di raggiungibilità, ed interni al sottospazio di inosservabilità, sono nulli.

15.4 Retroazione delle uscite

Abbiamo visto che, mentre una reazione lineare statica (cioè un controllo calcolato come funzione lineare delle uscite, $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y} + \mathbf{v}$) delle uscite offre possibilità alquanto limitate, l'utilizzo di un regolatore (osservatore asintotico e retroazione dello stato stimato) permette di allocare tutti gli autovalori (raggiungibili e osservabili). È naturale chiedersi se una retroazione più complessa delle uscite può essere in grado di offrire gli stessi risultati. In particolare, è opportuno considerare la classe delle leggi di retroazione lineari dinamiche, ovvero quelle in cui il controllo è calcolato come $u(s) = \mathbf{F}(s)\mathbf{y}(s) + \mathbf{v}(s)$.

Il significato di una tale retroazione è che il progettista del sistema di regolazione crea un vero e proprio sistema dinamico per il quale la uscita del sistema da regolare funge da ingresso, e la cui uscita si somma al nuovo riferimento $\mathbf{v}(s)$ per formare l'ingresso al sistema originale. Il nuovo sistema, detto "controllore", è collegato in retroazione al sistema controllato. Il controllore ha m.d.t. $\mathbf{F}(s)$, ovvero può essere pensato come una realizzazione nello spazio di stato

$$(\mathbf{A}_F, \mathbf{B}_F, \mathbf{C}_F, \mathbf{D}_F)$$

. Le dimensioni delle matrici sono in parte dettate dal problema: \mathbf{B}_F accetta tanti ingressi quante sono le uscite di misura di $\mathbf{G}(s)$, \mathbf{C}_F dà luogo a tante uscite regolate quanti sono gli ingressi di $\mathbf{G}(s)$. La scelta del numero di stati (cioè dell'ordine della $\mathbf{F}(s)$) è invece compito del progettista. In questa scelta, si dovrà trovare il miglior compromesso tra la versatilità del progetto (ordine minore del controllore implica minor numero di specifiche raggiungibili) e complicazione del controllore (se implementato analogicamente, un controllore di ordine elevato sarà di più difficile realizzazione e più sensibile alle tolleranze dei componenti; se numericamente, l'ordine elevato allunga i tempi di calcolo)

Per dare alcune indicazioni di massima sui criteri della scelta dell'ordine del controllore, si consideri da un lato che i controllori di ordine zero altro non sono che retroazioni statiche dell'uscita ($\mathbf{A}_F = \mathbf{B}_F = \mathbf{C}_F = \mathbf{0}$; $\mathbf{D}_F = \mathbf{K}$), di cui si conoscono le limitazioni. D'altro lato, se al controllore è concesso ordine n pari a quello del sistema da regolare, si può ottenere da esso la stessa flessibilità di scelta che si ha da un regolatore composto da osservatore identità e retroazione degli stati stimati. Per dimostrarlo, si scrivano le equazioni di stato del sistema da regolare (con stato \mathbf{x} , strettamente proprio per semplicità) e del controllore (con stato \mathbf{x}_F) collegati in retroazione:

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y}_F + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ D\mathbf{x}_F &= \mathbf{A}_F\mathbf{x}_F + \mathbf{B}_F\mathbf{y} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \\ \mathbf{y}_F &= \mathbf{C}_F\mathbf{x}_F + \mathbf{D}_F\mathbf{y} \end{aligned}$$

ovvero esplicitando e ponendo in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} D\mathbf{x} \\ D\mathbf{x}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_F\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{C}_F \\ \mathbf{B}_F\mathbf{C} & \mathbf{A}_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

Si considerino d'altronde ancora le equazioni del regolatore negli stati $(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}})$ del sistema e dell'osservatore, come ottenute in precedenza:

$$\begin{aligned} D\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{v} \\ D\hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{G}\mathbf{C})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{G}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{bmatrix} D\mathbf{x} \\ D\hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ -\mathbf{G}\mathbf{C} & \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K} + \mathbf{G}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

Si osserva che ponendo $\mathbf{D}_F = \mathbf{0}$, $\mathbf{C}_F = \mathbf{K}$, $\mathbf{B}_F = -\mathbf{G}$, $\mathbf{A}_F = \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{GC}$, la matrice dinamica dei sistemi coincide. Pertanto il controllore a n stati con f.d.t.

$$\mathbf{F}(p) = -\mathbf{K}(p\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{GC})^{-1} \mathbf{G}$$

posto in retroazione (positiva) al sistema ottiene la identica allocazione dei poli ottenuta dal regolatore standard.

Le uniche differenze tra questo controllore ed il regolatore standard sono:

- lo stato \mathbf{x}_F non insegue più asintoticamente lo stato \mathbf{x} , essendo la dinamica dell'errore $\mathbf{x} - \mathbf{x}_F$ eccitata ora dall'ingresso \mathbf{v});
- Nella f.d.t. in anello chiuso dell'intero sistema, possono ora comparire anche gli autovalori dell'osservatore (cioè di $\mathbf{A} + \mathbf{GC}$), che non sono cancellati sistematicamente.

Esempio: Consideriamo il sistema

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 - 3s^2 - 2s - 1}$$

Desideriamo allocare gli autovalori del sistema in $(-1, -1, -1)$, e quelli dell'osservatore in $(-3, -3, -3)$. Usando ad esempio il comando `acker` di Matlab, si trovano la matrice di retroazione è $K = [-2, -5, -6]$ e la matrice di iniezione $G = [0.8397, -1.3511, -11.8168]^T$ (nelle coordinate di una realizzazione in forma canonica di controllo).

Applicando queste matrici in un regolatore, si ottiene la f.d.t. in anello chiuso

$$G_r(s) = \frac{(s^2 + 2s + 3)(s + 3)^3}{(s + 1)^3(s + 3)^3} = \frac{(s^2 + 2s + 3)}{(s + 1)^3}$$

da cui si vede come i tre modi dell'osservatore sono cancellati in quanto non raggiungibili.

Applicando invece il controllore sopra visto, la cui espressione risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{GC})^{-1} \mathbf{G} = \\ &= \frac{-76s^2 - 57.7s - 22.7}{(s^2 + 2s + 3)(s + 13)(s^2 + 1.9s + 3.2)}, \end{aligned}$$

si ottiene

$$G_c(s) = \frac{(s^2 + 2s + 3)(s + 13)(s^2 + 1.9s + 3.2)}{(s + 1)^3(s + 3)^3}$$

Ponendo i poli dell'osservatore in $(-30, -30, -30)$, si otterrebbe una identica f.d.t. in anello chiusa per il sistema con regolatore completo, ma il controllore che non usa l'ingresso sarebbe ora

$$F(s) = \frac{(s + 2.1674)(s + 0.4662)}{(s + 123.9818)(s - 29.7276)(s + 1.7458)}$$

per il quale si ottiene

$$G_c(s) = \frac{(s^2 + 2s + 3)(s + 123.9818)(s - 29.7276)(s + 1.7458)}{(s + 1)^3(s + 30)^3}$$

Si noti che il controllore è esso stesso instabile: nulla a priori sappiamo infatti sulla stabilità della matrice $(\mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{GC})$.

15.5 Caso SISO: costruzione esplicita di un regolatore

Riassumendo quanto trovato sinora, diamo una procedura esplicita per il progetto di un regolatore per un sistema SISO che sia dato in forma di rapporto ingresso-uscita.

Per semplicità, si espliciteranno i calcoli per il caso di un sistema del terzo ordine a grado relativo 2, del tipo

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + \beta s^2 + \alpha s}$$

Si osservi che questa espressione rappresenta ad esempio la f.d.t. tra la tensione di armatura e la posizione dell'asse meccanico di un comune motore in corrente continua, data da

$$G(s) = \frac{1}{s} \frac{K_m}{(Js + B)(L_a s + R_a) + \mathbf{K}_m^2}$$

con K_m, J, B, R_a, L_a rispettivamente la costante magnetica del motore, il momento di inerzia dell'asse, il coeff. di attrito viscoso, la resistenza e la induttanza di armatura.

Possiamo pensare di costruire il regolatore a partire da una retroazione degli stati di una qualsiasi realizzazione raggiungibile di $G(s)$, che inizialmente possiamo supporre noti, grazie al principio di separazione.

La scelta della matrice di retroazione \mathbf{K} è fatta semplicemente nel caso che questa realizzazione sia in forma canonica di controllo, cioè

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{B}_c u \\ y &= \mathbf{C}_c \mathbf{x}_c + \mathbf{D}_c u\end{aligned}$$

con

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\alpha & -\beta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = [0].$$

In tal caso infatti, se si desidera allocare gli autovalori ad esempio nelle radici del polinomio $p_c(s) = s^3 + a_{c2}s^2 + a_{c1}s + a_{c0}$, basterà porre $-a_{c0} = k_1$, $-a_{c1} = -\alpha + k_2$, e $-a_{c2} = -\beta + k_3$.

Dobbiamo ora calcolare la matrice di iniezione delle uscite per un osservatore dello stato \mathbf{x}_c tale che gli autovalori propri della dinamica dell'errore di stima $\mathbf{e}_c = \mathbf{x}_c - \hat{\mathbf{x}}_c$, che vale

$$\dot{\mathbf{e}}_c = (\mathbf{A}_c + \mathbf{G}\mathbf{C}_c)\mathbf{e}_c$$

siano allocati dove si desidera. Si noti che questo è possibile perchè la realizzazione data è certamente anche osservabile: infatti, è una realizzazione minima (usa tre stati per una f.d.t. coprima di ordine 3).

Una tipica scelta per la posizione di questi autovalori è quella di averli circa 10 volte più veloci di quelli della dinamica imposta al sistema (con la precedente retroazione). Si desidera dunque scegliere \mathbf{G} tale che il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}_c + \mathbf{G}\mathbf{C}_c$ coincida con uno desiderato, che poniamo sia $p_o(s) = s^3 + a_{o2}s^2 + a_{o1}s + a_{o0}$.

Per ottenere questo scopo possiamo procedere direttamente, scrivendo il polinomio caratteristico di $\mathbf{A}_c + \mathbf{G}\mathbf{C}_c$ in funzione dei parametri incogniti in \mathbf{G} , calcolando il polinomio caratteristico e imponendo l'eguaglianza dei coefficienti. Questa tecnica è in genere conveniente per sistemi di dimensione piccola (2 o 3).

Più in generale, conviene procedere usando un cambiamento di coordinate nello spazio di stato, che posti il sistema in forma canonica di osservazione. Poniamo dunque $\mathbf{x}_c = \mathbf{T}_{co}\mathbf{x}_o$ e calcoliamo \mathbf{T}_{co} tale che $(\mathbf{T}_{co}^{-1}\mathbf{A}_c\mathbf{T}_{co} = \mathbf{A}_o, \mathbf{C}_c\mathbf{T}_{co} = \mathbf{C}_o)$ siano in forma canonica di osservazione.

Sappiamo da quanto visto in precedenza che possiamo ottenere la matrice di cambiamento di coordinate dalla relazione tra le matrici di osservabilità nelle due basi: infatti $\mathbf{O}_o = \mathbf{O}_c\mathbf{T}_{co} \Rightarrow \mathbf{T}_{co}^{-1} = \mathbf{O}_o^{-1}\mathbf{O}_c$, e, ricordando che

$$\mathbf{O}_o^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

possiamo facilmente ottenere nel nostro caso

$$\mathbf{O}_o^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \beta & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre, direttamente dalla definizione di matrice di osservabilità per il caso specifico, $\mathbf{O}_c = \mathbf{K}\mathbf{I}$.

Nelle coordinate della forma canonica di osservazione, il calcolo di G_o è immediato: basterà porre $-a_{o0} = G_{o1}$, $-a_{o1} = -\alpha + G_{o2}$, e $-a_{o2} = -\beta + G_{o3}$. Questa iniezione delle uscite sugli stati $\hat{\mathbf{x}}_o$ assolve il compito: la dinamica

$$\dot{\mathbf{e}}_o = (\mathbf{A}_o + \mathbf{G}_o\mathbf{C}_o)\mathbf{e}_o$$

ha gli autovalori assegnati. Nello schema da realizzare, comunque, si tratta di iniettare le uscite sulla dinamica degli stati $\hat{\mathbf{x}}_c$, che sono quelli usati per la retroazione. Si ha in questo caso

$$\dot{\mathbf{e}}_c = \mathbf{T}_{co}\dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{T}_{co}(\mathbf{A}_o + \mathbf{G}_o\mathbf{C}_o)\mathbf{T}_{co}^{-1}\mathbf{e}_c = \mathbf{A}_c + \mathbf{T}_{co}\mathbf{G}_o\mathbf{C}_c\mathbf{e}_c$$

il che significa che la matrice di iniezione cercata, nelle coordinate scelte per la realizzazione del regolatore, è data da

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}_{co}\mathbf{G}_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\beta \\ 1 & -\beta & \beta^2 - \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{o1} \\ G_{o2} \\ G_{o3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} G_{o3} \\ G_{o2} - \beta G_{o3} \\ G_{o1} - \beta G_{o2} + (\beta^2 - \alpha)G_{o3} \end{bmatrix}$$

Il controllore desiderato è pertanto dato da

$$\mathbf{F}(s) = -\mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{GC})^{-1}\mathbf{G}$$

16 Il metodo del luogo delle radici

I metodi di analisi nel dominio della frequenza, in particolare il criterio di stabilità di Nyquist ed i criteri basati sui margini di stabilità *sono di notevole utilità per una valutazione qualitativa delle caratteristiche dinamiche dei sistemi in retroazione*, consentendo di confrontare gli effetti di varie possibili scelte in un progetto di massima.

Un progetto più accurato richiede la conoscenza dei poli del sistema in retroazione e dell'influenza che su di essi hanno le variazioni dei più importanti parametri a disposizione del progettista.

il Metodo del Luogo delle Radici, o luogo di Evans, costituisce un procedimento grafico per la costruzione delle **Curve descritte nel piano complesso** dalle radici dell'equazione caratteristica al variare di un parametro, normalmente la costante di guadagno di anello.

Tale metodo risulta utile per una migliore conoscenza del sistema in retroazione e consente di avere indicazioni contemporaneamente sulla risposta a regime sinusoidale e la risposta transitoria, in modo da soddisfare le specifiche assegnate nell'uno e nell'altro campo.

16.1 Definizione del luogo delle radici

Sia data l'equazione caratteristica del sistema in retroazione:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

- Si supponga che la $G(s)H(s)$ sia posta nella forma che evidenzia la costante di guadagno K e le costanti di tempo τ_i .
- Si supponga inoltre che la costante di guadagno K sia positiva (sistema in retroazione negativa).

Al variare di K da 0 ad $+\infty$ le radici dell'equazione caratteristica descrivono delle curve nel piano s che costituiscono il **Luogo delle Radici**.

Il luogo delle radici risulta di grande utilità per giudicare l'effetto di variazioni della costante di guadagno K sulla stabilità e sulla risposta (transitoria) del sistema in retroazione.

Il metodo può essere facilmente modificato per ottenere le variazioni delle radici dell'equazione caratteristica al variare di parametri diversi dalla costante di guadagno, come ad esempio poli e zeri del sistema ad anello aperto: in tali versioni modificate il metodo viene indicato con il nome di **Contorno delle Radici**.

16.2 Equazioni del Luogo delle radici

Senza perdere in generalità, nel seguito, considereremo la funzione di anello $G(s)$ anziché $H(s)G(s)$, l'equazione caratteristica risulta:

$$1 + G(s) = 0$$

Per il tracciamento del luogo si esprime la $G(s)$ nella forma che mette in evidenza i poli e gli zeri:

$$\frac{G_1(s)}{K_1} = \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \quad n \geq m$$

Ricordando che la costante di guadagno K vale:

$$K = K_1 \frac{(-z_1)(-z_2) \dots (-z_m)}{(-p_1)(-p_2) \dots (-p_k)},$$

dove $p_1, p_2 \dots p_k$ con $k \leq n$ sono tutti e soli i poli non nulli. Si ottiene:

$$K_1 = K (-1)^{m+k} \frac{p_1 p_2 p_3 \dots p_k}{z_1 z_2 z_3 \dots z_m}$$

essendo poli e zeri considerati con il loro segno.

Se la costante di guadagno K è positiva ed il sistema è stabile in anello aperto (poli tutti negativi) ed a fase minima (zeri tutti negativi) la costante K_1 è positiva.

Al variare di K da 0 ad $+\infty$, la costante K_1 può variare da 0 ad $+\infty$ o da 0 a $-\infty$.

Se K_1 è positiva l'equazione:

$$1 + K_1 G_1 = 0$$

equivale alle due equazioni:

$$|G_1| = \frac{1}{K_1}$$

$$\arg G_1 = \pi(1 + 2\nu), \quad (\nu \text{ intero})$$

Se K_1 è negativa:

$$|G_1| = -\frac{1}{K_1}$$

$$\arg G_1 = 2\nu\pi, \quad (\nu \text{ intero})$$

Le equazioni relative all'argomento sono sufficienti per la costruzione del luogo.

Le equazioni relative al modulo sono utilizzate per la graduazione del luogo stesso in funzione di K_1 (o K).

16.3 Esempi

Esempio 1: si consideri un sistema con guadagno statico positivo e con funzione di trasferimento in anello aperto:

$$G_1(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)(s - p_4)}$$

Il punto s fa parte del luogo delle radici se e solo se:

$$\theta_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 = \pi(1 + 2\nu)$$

se questa è soddisfatta, il valore di K_1 cui tale punto corrisponde è dato da:

$$\frac{r_1}{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4} = \frac{1}{K_1}$$

Esempio 2: si consideri il sistema avente F.d.T. in anello aperto:

$$K \frac{1 - \tau s}{1 + \tau s} = K_1 \frac{s - \frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} \quad \text{con } K_1 = -K$$

In questo caso essendo la costante K_1 negativa.

16.4 Proprietà del luogo delle radici

Il luogo delle radici presenta alcune proprietà che ne vincolano l'andamento e ne facilitano il tracciamento.

Proprietà 1: il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della F.d.T. ad anello aperto $K_1 G_1(s)$, questi si intersecano nelle radici multiple. Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ e termina in uno zero di $G_1(s)$ o in un punto all'infinito.

Proprietà 2: il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale

Dim:

La proprietà discende dal fatto che le radici complesse di una equazione polinomiale a coefficienti reali si presentano a coppie coniugate.

Proprietà 3: Se $K_1 > 0$, un punto dell'asse reale appartiene al luogo se lascia alla sua destra un numero totale dispari di singolarità (poli e zeri). Mentre nel caso $K_1 < 0$, un punto dell'asse reale appartiene al luogo se lascia alla sua destra un numero totale pari di singolarità (poli e zeri).

Proprietà 4: Se $K_1 > 0$, l'angolo secondo il quale il luogo delle radici lascia un polo p_i è:

$$(2\nu + 1)\pi + \sum_{j=1}^m \arg(p_i - z_j) - \sum_{j \in \mathcal{I}_p} \arg(p_i - p_j)$$

dove:

$$\mathcal{I}_p = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, n\}$$

L'angolo secondo il quale il luogo tende ad uno zero z_i è:

$$(2\nu + 1)\pi - \sum_{j \in \mathcal{I}_z} \arg(z_i - z_j) + \sum_{j=1}^n \arg(z_i - p_j)$$

dove:

$$\mathcal{I}_z = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m\}$$

nel caso $K_1 < 0$ sostituire $(2\nu + 1)\pi$ con $2\nu\pi$.

Proprietà 5:

I punti di distacco di rami dall'asse reale soddisfano l'equazione:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma - z_i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma - p_i}, \quad s = \sigma + j\omega$$

Il punto di distacco è corrispondente a due soluzioni dell'equazione caratteristica coincidenti, ossia individuato da $\frac{dG_1(\sigma)}{d\sigma} = 0$. È facile verificare che tale condizione equivale alla condizione di cui sopra. Per punti di molteplicità h in generale valgono le equazioni

$$\frac{dG_1^j(\sigma)}{d\sigma^j} = 0, \quad j = 0, \dots, h-1$$

Proprietà 6: gli asintoti si incontrano in un punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sum_1^n p_i - \sum_1^m z_i}{n - m}$$

dove $\sum p_i$ e $\sum z_i$ sono, rispettivamente, le somme dei poli e degli zeri. Questo punto può essere considerato come il centro di gravità di un sistema di masse unitarie poste nei poli e di masse -1 poste negli zeri.

I rami che tendono all'infinito vi tendono secondo direzioni asintotiche con fase:

$$\gamma = \frac{\pi(2\nu + 1)}{n - m}, \quad r = 0 \dots n - m - 1, \quad \text{se } K_1 > 0$$

$$\gamma = \frac{2\nu\pi}{n-m}, \quad r = 0 \dots n-m-1, \quad \text{se } K_1 < 0$$

Dim (cenni)

Per i rami che tendono all'infinito si può porre:

$$K_1 G_1 \approx K_1 \frac{s^m}{s^n} = -1$$

$$K_1 = -s^{n-m} \rightarrow s^{n-m} = -K_1$$

$$\left. \begin{aligned} (n-m) \arg s &= \pi(1 + 2\nu) \\ \gamma = \arg s &= \frac{\pi}{n-m} + \frac{2\nu\pi}{n-m} \end{aligned} \right\} \quad \text{per } K_1 > 0$$

Proprietà 7: gli eventuali punti di intersezione del luogo con l'asse immaginario si ottengono: risolvendo $K_1 G_1(j\omega) = -1$ (Annullando separatamente la parte reale e la parte immaginaria si ottengono i valori di ω e K_1); ovvero utilizzando il Criterio di Routh applicato all'equazione caratteristica.

16.5 Contorno delle radici

Contorno delle radici relativo alle variazioni di un polo (a ciclo aperto):

$$G(s) = R(s) \frac{1}{\tau s + 1}$$

a ciclo chiuso:

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

Equaz. caratteristica:

$$1 + G(s) = 1 + R(s) \frac{1}{\tau s + 1} = 0$$

cioè:

$$1 + \tau s + R(s) = 0, \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{\tau s}{1 + R(s)} = 0$$

Contorno delle radici relativo alla variazione di uno zero:

$$G(s) = R(s)(1 + rs)$$

da cui:

$$1 + \tau s R(s) + R(s) = 0, \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{\tau s R(s)}{1 + R(s)} = 0$$