

A In Figura 1 è riportata una rappresentazione concettuale del sistema dinamico costituito da una gamba con applicato un esoscheletro per aumentare la coppia disponibile all'articolazione del ginocchio. In particolare si considera che l'articolazione sia attuata dalla coppia di gruppi muscolari, quadricipite femorale e bicipite femorale, e dall'attuatore dell'esoscheletro. L'attuazione muscolare è complessivamente modellata da un momento agente sull'articolazione controllato dal sistema nervoso (centrale e periferico). L'attuazione artificiale è invece modellata come un motore controllato in coppia con trasmissione viscoelastica.

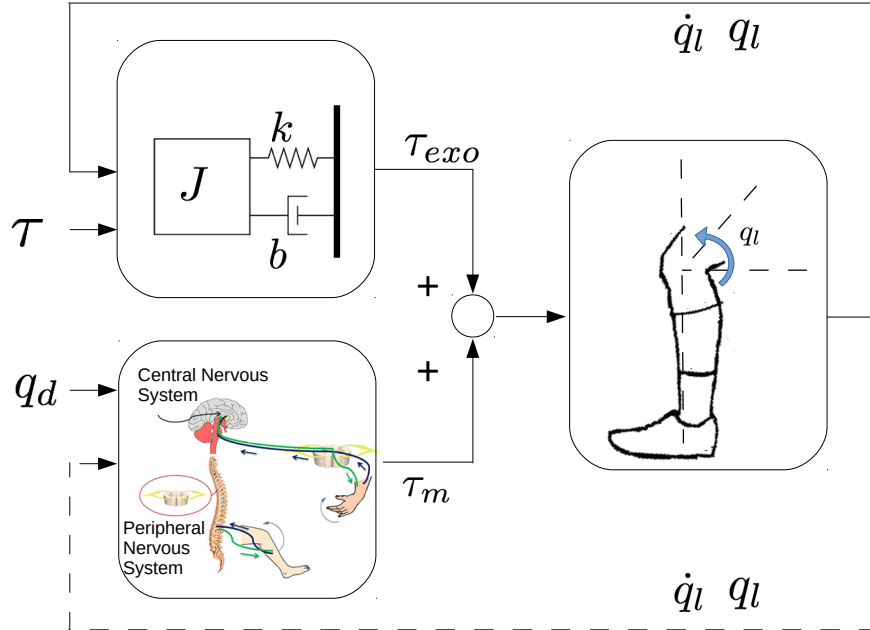


Figura 1: Sistema dinamico gamba con esoscheletro.

Le equazioni che governano la dinamica del sistema di Figura 1 sono di seguito riportate:

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{q}_l + k(q_l - q_m) + b(\dot{q}_l - \dot{q}_m) &= -mgl \cos(q_l) + \tau_m \\ J_m \ddot{q}_m + k(q_m - q_l) - b(\dot{q}_l - \dot{q}_m) &= \tau \end{aligned}$$

dove q_l rappresenta la posizione angolare della coscia rispetto al polpaccio, q_m la posizione del motore, k la rigidità della trasmissione del motore, b lo smorzamento della trasmissione del motore, m la massa della coscia, l la distanza del baricentro della coscia dal giunto, J_m l'inerzia del motore, τ_m il momento risultante esercitato dai gruppi muscolari.

In accordo alla *Servo-Hypothesis*, nell'esecuzione di posizionamenti, è possibile considerare che τ_m sia controllata dal sistema nervoso per effettuare una azione simile a quella di un controllore in retroazione sulla posizione desiderata. In questo caso si prenda in esame la seguente legge proporzionale, derivativa:

$$\tau_m = k_p(q_d - q_l) - k_d \dot{q}_l,$$

per approssimare l'azione dei muscoli, dove q_d rappresenta la posizione desiderata della coscia.

Assumendo di avere a disposizione

- la misura di τ_m , data da sensori elettromiografici posti sui gruppi muscolari che attuano il ginocchio;
- la coppia motrice τ come controllo,

si risponda alle seguenti richieste:

- A.1** In condizioni di esoscheletro spento ($\tau = 0$) si determini il valore di q_d necessario per avere la coscia parallela al suolo ($q_l = 0$) all'equilibrio.
- A.2** Si determini una rappresentazione del sistema linearizzato in forma di stato attorno alla configurazione di equilibrio determinata al punto precedente.

A.3 Si considerino i seguenti valori numerici: $k = 1 \text{ N m/rad}$, $b = 1.0 \times 10^{-2} \text{ N m/rad/s}$, $m = 1 \text{ Kg}$, $l = 0.4 \text{ m}$, $J_m = 1.0 \times 10^{-3} \text{ Kg m}^2$, $k_p = 20 \text{ N m/rad}$ e $k_d = 40 \text{ N m/rad/s}$.

Si scrivano le matrici numeriche del sistema linearizzato in forma di stato considerando l'ingresso di controllo $u = \tau$ e l'uscita $y = \tau_m$.

Nel seguito si consideri la funzione di trasferimento semplificata:

$$G(s) = \frac{-2500(s + 100)}{(s + 250)(s^2 + 10s + 1000)}$$

A.4 Si sintetizzi un controllore stabilizzante in grado di assolvere i seguenti compiti:

- Annullare esattamente lo sforzo richiesto all'utente (corrispondente al caso $y = 0$) a partire dalla condizione iniziale di coscia parallela al suolo. Si faccia inoltre in modo che durante l'evoluzione, per massimizzare il comfort di utilizzo dell'esoscheletro, la coppia muscolare (l'uscita) non si inverta mai di segno, ed entri senza più uscirne, nell'intervallo $\pm 0.1962 \text{ N m}$ centrato attorno al valore finale desiderato entro un tempo pari a $2 \times 10^{-3} \text{ s}$.
- Si consideri il caso in cui i parametri m , l , k_p e k_d siano relativi al sistema nel caso di funzionamento *nominale*. Realizzare un controllore tale per cui l'effetto delle variazioni dei suddetti parametri sia quasi completamente annullato sull'uscita, per movimenti dell'esoscheletro nel range $1.0 \times 10^{-3} - 1.0 \times 10^3 \text{ rad/s}$.

Si riportino quindi:

- le specifiche tradotte nel dominio della frequenza e visualizzate sul diagramma di Bode,
- il procedimento di progettazione del controllore illustrato con diagrammi a blocchi,
- la funzione di trasferimento del controllore progettato,
- i diagrammi di Bode del sistema nelle diverse fasi del progetto (mostrando il raggiungimento delle specifiche),
- la risposta al gradino del sistema controllato riportando le caratteristiche più significative.

B Si discutano i modi propri e si determini la funzione di trasferimento del seguente sistema dinamico considerando condizioni iniziali nulle in posizione e velocità

$$\begin{cases} \ddot{q}_L &= 10(q_M - q_L) \\ \ddot{q}_M &= -10(q_M - q_L) + u \\ y &= q_L \end{cases}$$

Soluzione

A.1 Imponendo $\ddot{q}_l = \ddot{q}_m = \dot{q}_l = \dot{q}_m = q_l = \tau = 0$ ed assumendo $\tau_m = k_p(q_d - q_l) - k_d\dot{q}_l$, le equazioni del moto si riducono a

$$\begin{aligned} q_d &= \frac{mgl}{k_p} \\ q_m &= 0 \end{aligned}$$

A.2 Indicando con: $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^\top = [q_l \ q_m \ \dot{q}_l \ \dot{q}_m]^\top$ il vettore delle variabili di stato, $u = \tau$ l'ingresso di controllo, $y = \tau_m$ l'uscita del sistema; il sistema non lineare assume la seguente forma di stato:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= \frac{-mgl \cos(x_1) - k(x_1 - x_2) - b(x_3 - x_4) + k_p(q_d - x_1) - k_dx_3}{ml^2} \\ \dot{x}_4 &= \frac{u - k(x_2 - x_1) + b(x_3 - x_4)}{J_m} \end{aligned}$$

Linearizzando queste equazioni attorno alla condizione di equilibrio individuata in precedenza al punto **A.1** si ottiene

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_p+k-mgl \sin(x_1)}{ml^2} & \frac{k}{ml^2} & -\frac{k_d+b}{J_m} & \frac{b}{ml^2} \\ \frac{k}{J_m} & -\frac{k}{J_m} & \frac{b}{J_m} & -\frac{b}{J_m} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_m} \end{bmatrix} u$$

Per quanto riguarda l'uscita del sistema, si ha

$$y = Cx = [-k_p \ 0 \ -k_d \ 0] x$$

A.3 Sostituendo i valori numerici forniti, si ottiene $q_d = 0.1962$ rad ed $\tau_m = 3.924$ N m. Le matrici numeriche del sistema linearizzato sono

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -131.3 & 6.3 & -250.1 & 0.1 \\ 1000 & -1000 & 10 & -10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix}, \quad C = [-20 \ 0 \ -40 \ 0].$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo $u = \tau$ e l'uscita $y = \tau_m$ è

$$G(s) = \frac{-2500(s+100)(s+0.5)}{(s+249.5)(s+0.501)(s^2+10.02s+999.8)}$$

A.4 Il sistema risulta essere stabile in catena aperta. Si procede a sintetizzare il controllore $C(s)$ affinché il sistema in anello chiuso, approssimato ad un sistema del primo ordine, rispetti le specifiche.

- Si vuole portare il sistema dal valore di $\tau_m(0) = 3.924$ N m al valore di regime desiderato $\tau_{m,REF} = 0$ N m. Il gradino del segnale di riferimento in ingresso al sistema ha dunque ampiezza $\tau_{m,STEP} = -3.924$ N m.
- La richiesta di non inversione di segno dell'uscita si traduce in una specifica di sovraelongazione massima percentuale $S\% = 0\%$. Ossia, viene richiesta assenza di sovraelongazione, $\tau_{m,MAX} = \tau_{m,REF}$, sul segnale di uscita del sistema. La specifica quindi è quella di un margine di fase di almeno $\pi/2$.
- Si vuole che l'uscita entri in un intervallo di $[-0.1962 \text{ N m}, 0.1962 \text{ N m}]$, senza più uscirne, dopo 2×10^{-3} secondi. L'intervallo, simmetrico rispetto al valore $\tau_{m,REF}$, ha una ampiezza percentuale di:

$$tol_{PERC} = 5\%$$

rispetto al valore di regime. La specifica sulla pulsazione di taglio ω_T è $\omega_T > 1500$ rad/s.

- Si desidera inoltre un errore a al gradino che sia nullo a regime, il soddisfacimento di tale specifica è garantito con un controllore del tipo:

$$C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1 \text{ e } t \geq 1.$$

- Affinché il controllore sintetizzato annulli quasi completamente l'effetto delle variazioni parametriche sull'uscita occorre, che nel range di frequenze di interesse, sia rispettata la relazione $|S(j\omega)| \ll 1$. Con $S(s) = 1/(1 + C(s)G(s))$ funzione sensibilità d'anello. Per realizzare tale condizione è necessario imporre che

$$|C(j\omega)G(j\omega)| \gg 2$$

ossia

$$|C(j\omega)G(j\omega)|_{\text{dB}} \gg 6\text{dB}$$

In figura 2 si mostra il diagramma di Bode del sistema $G(s)$ con le specifiche da rispettare esclusa quella sull'errore al gradino nullo.

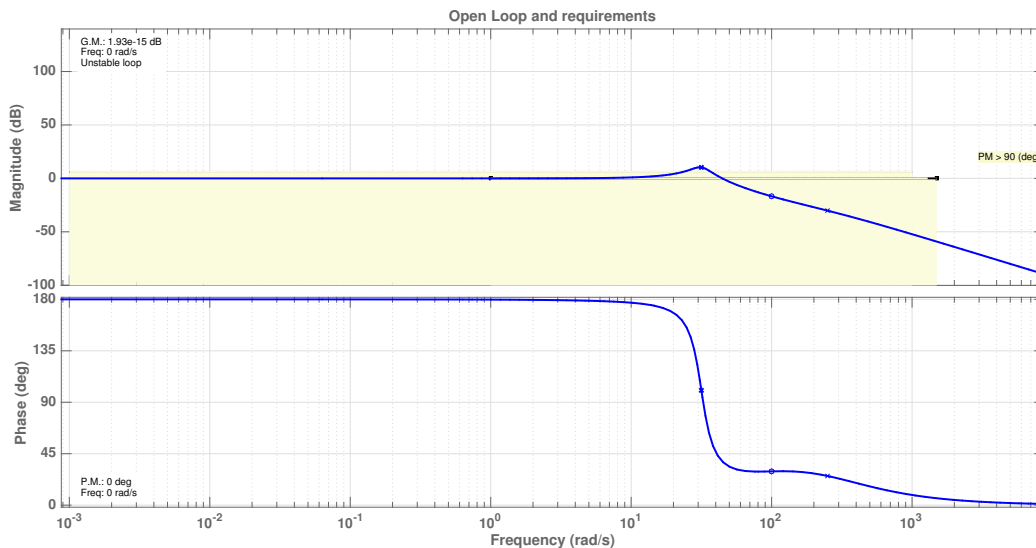


Figura 2: Diagrammi di Bode del sistema in anello aperto, con le specifiche in evidenza esclusa quella sull'errore al gradino nullo.

La funzione di trasferimento presenta una costante di guadagno negativo, si consideri quindi un controllore statico della forma $C(s) = -\frac{1}{s}$, il diagramma di Bode ottenuto è riportato in figura 3 Per verificare le specifiche sul taglio e la sensibilità alle variazioni parametriche si può alzare il valore della costante di guadagno. Così facendo però si perde la stabilità del sistema in quanto l'attraversamento a $-\pi$ avviene a pulsazioni più basse di quella di taglio. Per aumentare la fase si inserisce quindi uno zero (ad esempio in -1). Con il controllore della forma $C(s) = -1000 \frac{s+1}{s}$, il diagramma di Bode ottenuto è riportato in figura 4

La specifica sul margine di fase però non è verificata. Al fine di aumentare il margine di fase si inserisce una rete anticipatrice a cavallo della pulsazione di taglio (zero in -25 e polo in -10^5), abbassando la costante di guadagno a 18 si ottiene un controllore della forma $C(s) = -18 \frac{(1+s)(1+0.04s)}{s(1+10^{-5}s)}$, il diagramma di Bode ottenuto è riportato in figura 5

In figura 6 si mostra la risposta al gradino del sistema con il controllore $C(s)$ inserito.

In figura 7 si mostra la funzione sensibilità $S(s)$ con il controllore $C(s)$ realizzato. Si noti che fino alla pulsazione 10^3 rad/s è al di sotto di 0db come richiesto dalle specifiche.

B Si considerino le variabili di stato $x_1 = q_M - q_L$ e $x_2 = q_M + q_L$ che hanno dinamica

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 &= 10 - 20x_1 + u \\ \ddot{x}_2 &= u \\ y &= \frac{x_2 - x_1}{2} \end{cases}$$

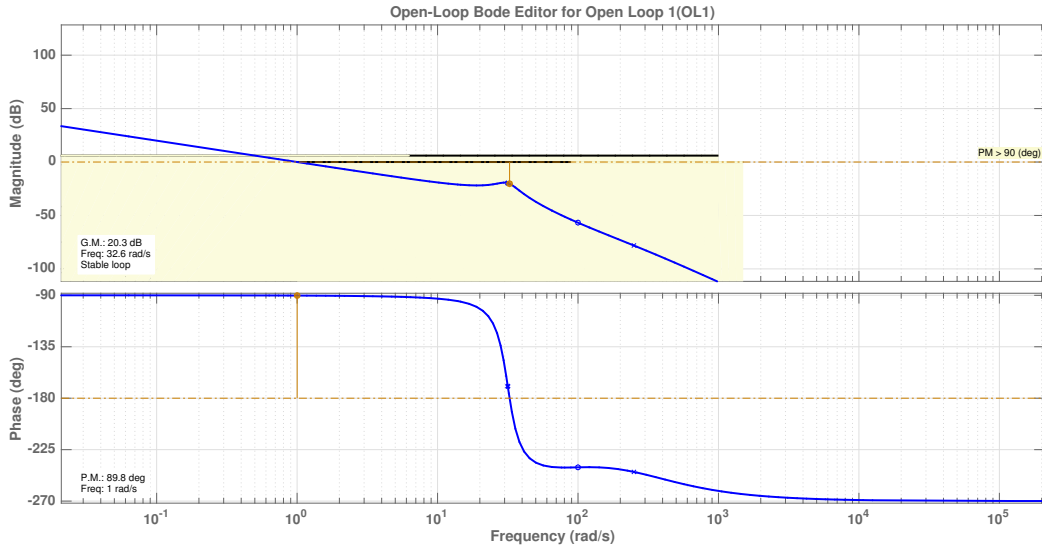


Figura 3: Diagrammi di Bode del sistema con $C(s) = -\frac{1}{s}$

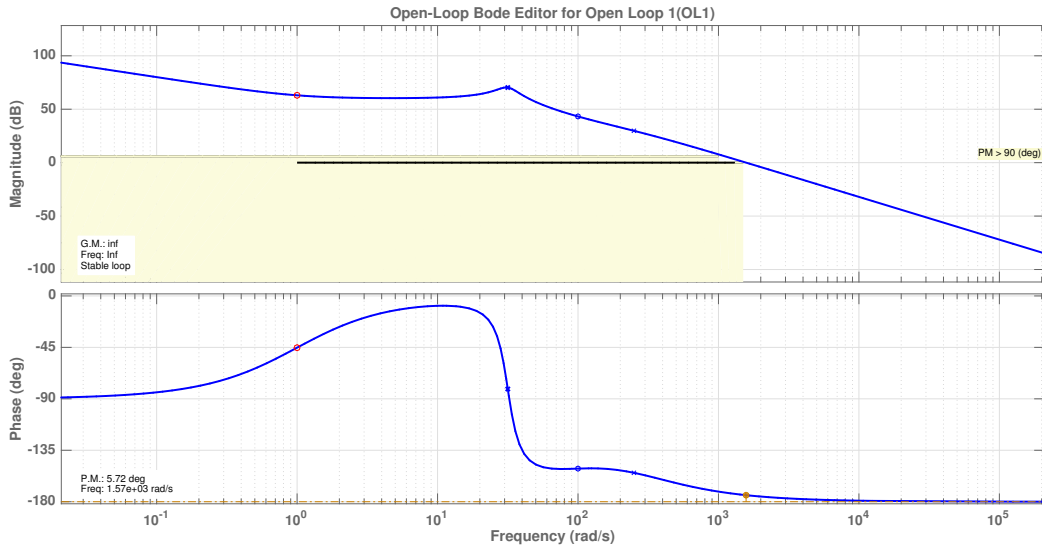


Figura 4: Diagrammi di Bode del sistema con $C(s) = -1000 \frac{s+1}{s}$

con condizioni iniziali nulle. Andando ad applicare la trasformata di Laplace si ottiene

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{1}{s^2+20}U(s) \\ X_2(s) = \frac{1}{s^2}U(s) \\ Y(s) = \frac{X_2(s)-X_1(s)}{2} \end{cases}$$

Pertanto la funzione di trasferimento risulta $Y(s) = -\frac{10}{s^2+20}U(s)$ da cui segue che il sistema ha due modi associati ad autovalori immaginari puri in $\pm j\sqrt{20}$: $\sin \sqrt{20}$ e $\cos \sqrt{20}$.

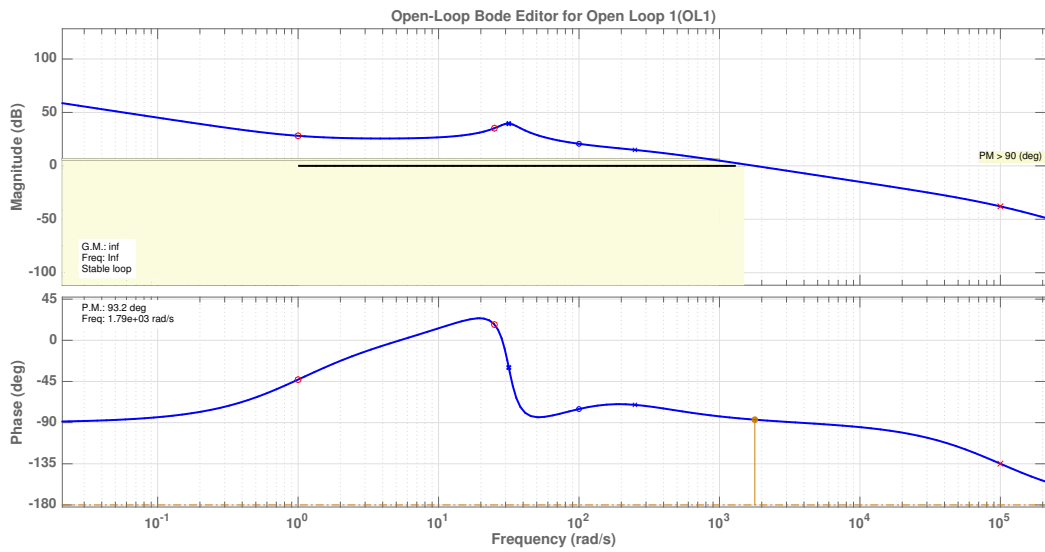


Figura 5: Diagrammi di Bode del sistema con $C(s) = -18 \frac{(1+s)(1+0.04s)}{s(1+10^{-5}s)}$

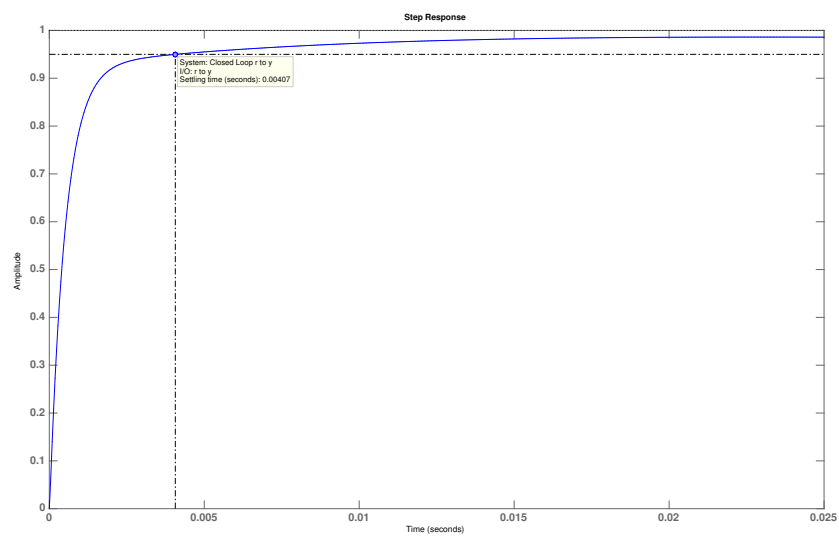


Figura 6: Risposta a gradino del sistema con il controllore $C(s)$ inserito

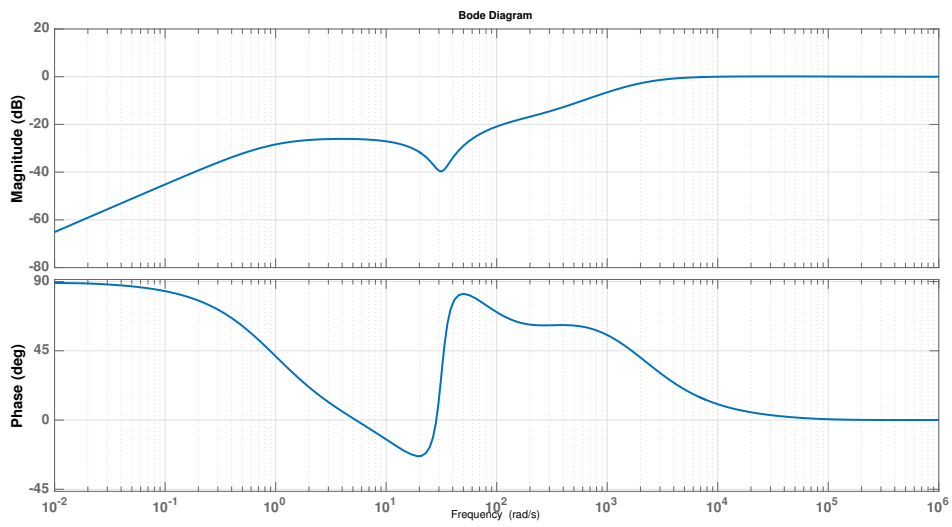


Figura 7: Funzione sensibilità $S(s)$ con il controllore $C(s)$ realizzato