

A Si consideri il sistema di serbatoi rappresentato in figura e caratterizzato dalla dinamica non lineare:

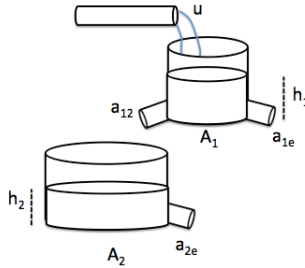


Figura 1: Sistema di serbatoi in cascata

$$\begin{cases} A_1 \dot{h}_1 = -(a_{12} + a_{1e})\sqrt{2gh_1} + u \\ A_2 \dot{h}_2 = -(a_{2e} + a_d)\sqrt{2gh_2} + a_{12}\sqrt{2gh_1} \end{cases}$$

Dove u è il volume del flusso di liquido incompressibile in ingresso al sistema, $A_1 = 100\text{m}^2$ e $A_2 = 200\text{m}^2$ sono le aree dei due serbatoi mentre $a_{12} = a_{1e} = a_{2e} = 1\text{m}^2$ sono le aree degli orifici che dal serbatoio 1 versano liquido nel serbatoio 2 e all'esterno e dal serbatoio 2 all'esterno rispettivamente. I livelli del fluido nei serbatoi sono indicati da h_1 e h_2 . Si suppone di avere a disposizione un sensore per la lettura del valore di h_2 . La variabile a_d indica l'area di un foro alla base del secondo serbatoio e rappresenta un disturbo statico.

- A.1** Nel caso $a_d = 0\text{m}^2$ si determini lo stato di equilibrio e l'ingresso di equilibrio che garantiscano una uscita costante pari ad $\bar{h}_2 = 5\text{m}$ (si utilizzi l'approssimazione $g = 10\text{m/s}^2$). Si linearizzi il sistema intorno all'equilibrio ottenuto e se ne caratterizzi la stabilità. Si determinino poi le funzioni di trasferimento tra il disturbo a_d e l'uscita del sistema y e tra l'ingresso u e l'uscita del sistema y .
- A.2** Per una variazione costante Δu della portata in ingresso u si determinino le condizioni su Δu affinché il liquido non esca dal secondo serbatoio considerando che questo abbia una quota massima pari a $h_M = 8\text{m}$. Commentare sulla correttezza o meno di una approssimazione al primo ordine del sistema e sulla presenza di poli dominanti.
- A.3** Si progetti un controllore che garantisca un errore al gradino nullo, che consenta una reiezione totale a regime dei disturbi statici sull'uscita del sistema e che renda il sistema asintoticamente stabile in anello chiuso.

B Si consideri il sistema dinamico lineare rappresentato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10s - 10}{s^2 + 10s} \quad (1)$$

- B.1** Si disegnino i diagrammi di Bode e i luoghi delle radici del sistema.
- B.2** Si supponga di retroazionare il sistema con un controllore statico $C(s) = k$. Determinare un valore di k reale per cui il sistema in ciclo chiuso è stabile con margine di fase di almeno 50 gradi.
- B.3** Si aggiunga al controllore statico una rete anticipatrice che raddoppi la pulsazione di taglio continuando a garantire la stabilità del sistema.

C.1 Si consideri il sistema LTITC rappresentato dalle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]. \quad (3)$$

Si determinino, se possibile, le condizioni iniziali del sistema affinché l'evoluzione libera sia del tipo:

- a) $2e^{-2t}$, b) $te^{-t} \cos(\frac{1}{2}t)$, c) $e^{-t} \cos(\frac{1}{2}t)$, d) $te^{-t} \cos(t)$, e) te^{-2t} .

Soluzione

A.1 Dato il valore di riferimento $\bar{h}_2 = 5$ e un disturbo $a_d = 0$ la coppia stato–ingresso di equilibrio del sistema risulta caratterizzata da

$$\begin{cases} \bar{h}_1 &= \frac{a_{2e}^2}{a_{12}^2} \bar{h}_2 = 5 \\ \bar{u} &= \frac{(a_{12}+a_{1e})a_{2e}}{a_{12}} \sqrt{2g\bar{h}_2} = 20 \end{cases} \quad (4)$$

La matrice dinamica e la matrice degli ingressi del sistema linearizzato risultano

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{a_{12}+a_{1e}}{A_1} \frac{g}{\sqrt{2g\bar{h}_1}} & 0 \\ \frac{a_{12}}{A_2} \frac{g}{\sqrt{2g\bar{h}_1}} & -\frac{a_{2e}+a_d}{A_2} \frac{g}{\sqrt{2g\bar{h}_2}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2g\bar{h}_2}}{A_2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene

$$A = \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0.005 & -0.005 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & -0.05 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Gli autovalori della matrice A sono reali e negativi, pertanto il linearizzato intorno all'equilibrio risulta asintoticamente stabile.

Le funzioni di trasferimento del sistema si calcolano considerando la matrice di uscita $C = (0 \ 1)$ e si ottiene $Y(s) = G_u(s)U(s) + G_d(s)D(s)$ dove:

$$G_u(s) = \frac{5 \cdot 10^{-5}}{s^2 + 0.025s + 0.0001} \quad (7)$$

$$G_d(s) = -\frac{0.05}{s + 0.005}$$

A.2 Il sistema ha due poli reali negativi e la risposta al gradino quindi non presenta sovraelongazioni. In altre parole, in risposta ad un gradino di ampiezza Δu , la quota del secondo serbatoio evolve aumentando di valore fino al raggiungimento a regime del valore $\frac{\Delta u}{2}$. Infatti dal teorema del valore finale si ottiene che $\lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{\Delta u}{s} = \frac{\Delta u}{2}$. È quindi sufficiente che il volume in ingresso non aumenti più di $16\text{m}^3/\text{s}$.

Il sistema però non si comporta come un sistema del primo ordine in quanto non è presente un polo dominante. Il rapporto tra i due poli infatti risulta inferiore a 10 e quindi una approssimazione con un sistema ad un polo dominante non risulta corretta.

A.3 Lo schema di controllo del sistema è rappresentato in figura.

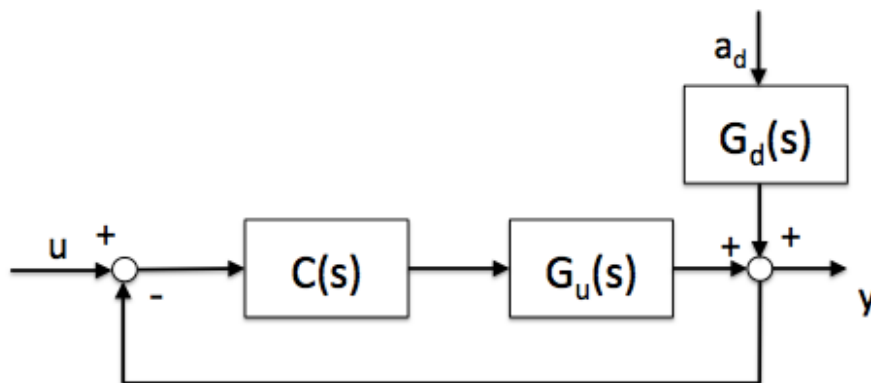


Figura 2: Schema a blocchi del sistema controllato

Non essendo presente un polo nell'origine della funzione di trasferimento G_u , affinché si abbia un errore a regime nullo, è sufficiente considerare un controllore di tipo 1: $C(s) = \frac{k}{s}$. Si noti che essendo così presente un polo dell'origine a monte del disturbo anche la specifica sulla reiezione totale dei disturbi statici sull'uscita. Infatti considerando il valore a regime della risposta al gradino di ampiezza generica a_d della funzione di trasferimento tra disturbo e uscita in anello chiuso si ottiene $\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{G_d(s)}{1+C(s)G_u(s)} \frac{a_d}{s} = 0$

proprio per la presenza del polo nell'origine del controllore. Affinché il sistema sia stabile in anello chiuso è necessario scegliere una costante di guadagno k che mi assicuri la presenza di soli poli a parte reale negativa. Il denominatore della funzione di trasferimento in anello chiuso risulta infatti: $s^3 + 0.025 s^2 + 10^{-4} s + k 5 10^{-5}$. La tabella di Routh risulta:

1	10^{-4}
0.025	$k 5 10^{-5}$
α	0
$k 5 10^{-5}$	0

con $\alpha = -\frac{1}{0.025}(k 5 10^{-5} - 0.025 10^{-4})$ da cui segue necessariamente una scelta di k tale per cui $0 < k < 0.05$.

B.1 Il sistema presenta un polo nell'origine, un polo reale in -10 e uno zero positivo in 1 , il guadagno del sistema è pari a -1 . I diagrammi di Bode del sistema sono riportati in figura dove si notano i vari contributi asintotici e in tratteggiato i diagrammi reali:

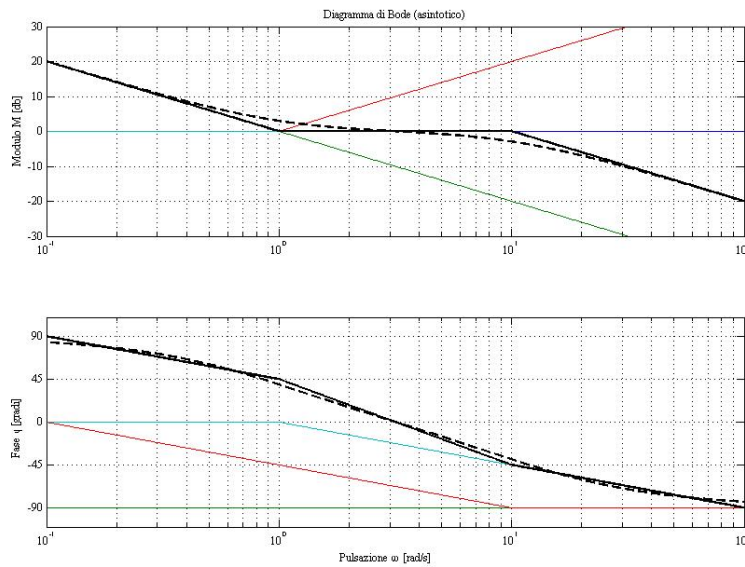


Figura 3: Diagrammi di Bode di $G(s) = \frac{10s-10}{s^2+10s}$

I luoghi delle radici del sistema sono riportati in figura

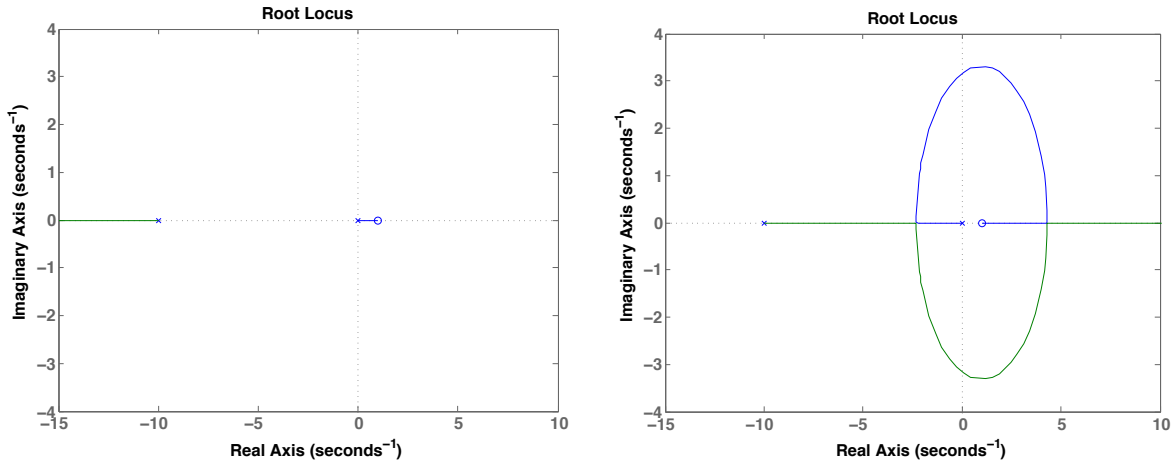


Figura 4: Luoghi delle radici di $G(s) = \frac{10s-10}{s^2+10s}$

B.2 Scegliendo $k = -1$ il diagramma delle fasi trasla in alto (o in basso) di π e porta il taglio del diagramma delle ampiezze intorno al valore 2rad/sec a cui corrisponde un margine di fase praticamente nullo. Traslando in basso il diagramma delle ampiezze (scegliendo quindi un $-1 < k < 0$) si ottengono pulsazioni di taglio minori e margini di fase maggiori. Con la scelta $k = -0.3$ si ottiene un margine di fase pari a 70gradi (pulsazione di taglio circa 0.3rad/sec) come si può vedere dalla figura:

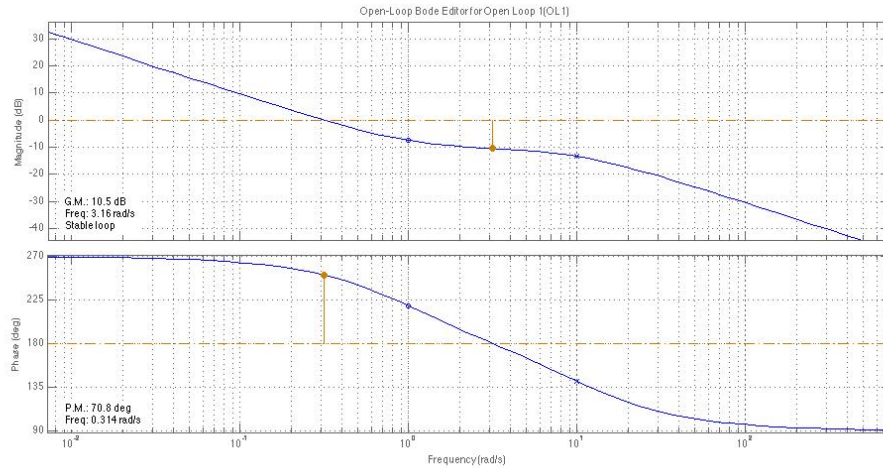


Figura 5: Diagrammi di Bode con $C(s) = \frac{-0.3}{s}$

B.3 Per raddoppiare la pulsazione di taglio la rete anticipatrice deve avere un polo e uno zero a pulsazione minore di 0.6, lo zero deve avere pulsazione minore del polo e i loro contributi non devono andare ad alzare troppo la pulsazione di taglio per evitare l'instabilità del sistema visto che il diagramma di fase taglia l'asse a $-\pi$ per pulsazioni vicine a 2rad/sec. Ad esempio ponendo uno zero in -0.01 e un polo in -0.02 si ottiene una pulsazione di taglio di circa 0.7 sempre con $k = -0.3$. I diagrammi del sistema così controllato risultano

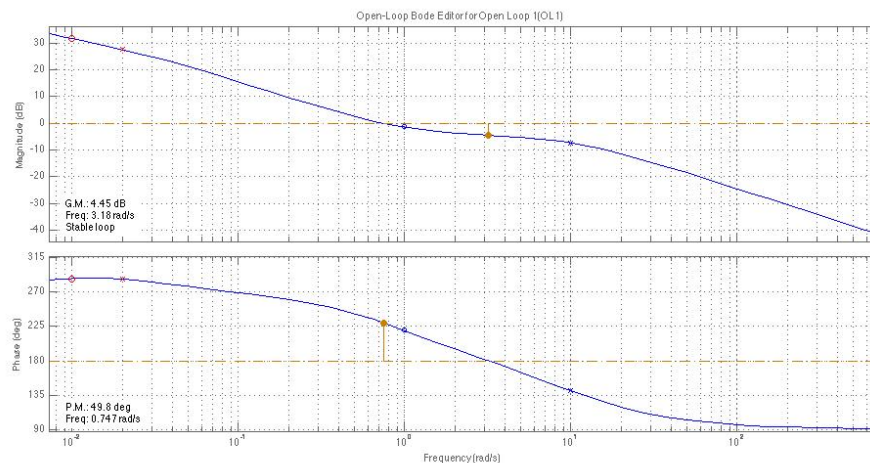


Figura 6: Diagrammi di Bode con $C(s) = \frac{-0.3(1+100s)}{s(1+50s)}$.

C.1 La matrice è in forma di Jordan e detta

$$M = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & \sin \frac{t}{2} \\ -\sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

si ha che l'esponenziale di At risulta:

$$\begin{pmatrix} e^{-t}M & te^{-t}M & 0 \\ 0 & e^{-t}M & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Considerando l'ingresso

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]. \quad (10)$$

Si ha che l'evoluzione libera è data dal vettore Ce^{At} per il vettore delle condizioni iniziali x_0 . Sviluppando i conti si ottiene $Ce^{At} = (e^{-t} \cos \frac{t}{2}, e^{-t} \sin \frac{t}{2}, t e^{-t} \cos \frac{t}{2} - e^{-t} \sin \frac{t}{2}, t e^{-t} \sin \frac{t}{2} + e^{-t} \cos \frac{t}{2}, e^{-2t})$. Pertanto con l'evoluzione in a) è possibile con una condizione iniziale $x_0^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2)$. Per la b) è necessaria la condizione iniziale $x_0^T = (0 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0)$. La c) è possibile con una condizione iniziale $x_0^T = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$. La d) e la e) non sono possibili perché nel caso della d) la pulsazione e nel caso di e) la parte reali non corrispondono a quelle degli autovalori di A .