

Figura 1: Sistema meccanico

Il sistema meccanico di Figura 1 è la schematizzazione di un tipo di montacarichi.

Il carico di massa M è collegato ad una puleggia P di massa trascurabile. Inoltre, si ha una forza di disturbo F verticale che agisce sul carico stesso.

Il cavo che scorre senza strisciare attorno alla puleggia ha delle caratteristiche di elasticità e smorzamento viscoso approssimativamente rappresentabili a parametri concentrati come un sistema molla-smorzatore con costante elastica k e smorzamento viscoso b in serie ad un cavo inestensibile.

L'altra estremità del cavo è collegata nel punto A ad un sistema schematizzabile come un glifo a croce con lunghezza dell'asta L e massa m_l concentrata nell'estremo B , dove agisce una coppia motrice τ . L'asta ha massa ed inerzia trascurabili; inoltre, i tratti rettilinei della fune sono verticali.

Detto θ l'angolo formato dalla leva con l'orizzontale, ed y_p la posizione verticale della puleggia P (si veda Figura 1), le equazioni della dinamica del sistema sono le seguenti:

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau}{\sin^2(\theta)L^2m_l} - \frac{L \cos(\theta)}{\sin^2(\theta)L^2m_l} \left(k (\sin(\theta)L - 2y_p) + b (\dot{\theta} \cos(\theta)L - 2\dot{y}_p) \right) + \dot{\theta}^2 \sin(\theta)Lm_l$$

$$\ddot{y}_p = -g + \frac{2k (\sin(\theta)L - 2y_p)}{M} + \frac{2b (\dot{\theta} \cos(\theta)L - 2\dot{y}_p)}{M} + \frac{F}{M}$$

A.1 Si determini il punto di equilibrio considerando una massa \bar{M} , l'asta del glifo posta ad un angolo $\bar{\theta}$ e disturbo F nullo.

A.2 Supponendo di disporre della misura della posizione y_p , si determini una rappresentazione in forma di stato simbolica del sistema linearizzato intorno all'equilibrio calcolato al punto precedente.

Successivamente, si considerino i seguenti valori numerici:

$$m_l = 5 \text{ [Kg]}, k = 5000 \text{ [N/m]}, b = 1000 \text{ [Ns/m]}, g = 9.81 \text{ [m/s}^2\text{]}, L = 1.5 \text{ [m]}, \bar{M} = 10 \text{ [Kg]}$$

A.3 Si determinino le funzioni di trasferimento tra l'ingresso $u = \tau$ e l'uscita $y = y_p$, e tra il disturbo $u_d = F$ e la medesima uscita, nei due casi $\bar{\theta} = \frac{\pi}{6}$ e $\bar{\theta} = -\frac{\pi}{6}$.

Si discuta inoltre la stabilità dell'equilibrio del sistema linearizzato nelle due condizioni, dando un'interpretazione fisica del risultato.

A.4 Per il caso $\bar{\theta} = \frac{\pi}{6}$, si determini una legge di controllo per τ che agisca in modo tale da garantire che:

A.4.1 il corpo di massa \bar{M} si sposti, dalla configurazione di equilibrio precedentemente calcolata, esattamente di 60 cm verso l'alto, senza superare tale posizione di oltre 3 cm, ed entrando senza più uscirne in un intervallo di ± 1.2 cm rispetto al valore di regime entro al più 0.5 sec.

A.4.2 in corrispondenza di un disturbo di forza (in N) del tipo

$$F = -30 + 10 \sin(0.2\pi t) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 0.4\pi t\right)$$

non si abbia a regime uno spostamento della massa M superiore a 5 mm.

Si riportino quindi:

- il diagramma di Bode della funzione d'anello aperto con le relative specifiche da rispettare;
- il controllore progettato;
- il diagramma a blocchi del sistema prima e dopo l'inserimento del controllore;
- la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

B Si prenda in esame la risposta a gradino presentata in Figura 2. Considerando le caratteristiche riportate, si ricavi la funzione di trasferimento del sistema da cui tale risposta è stata ottenuta.

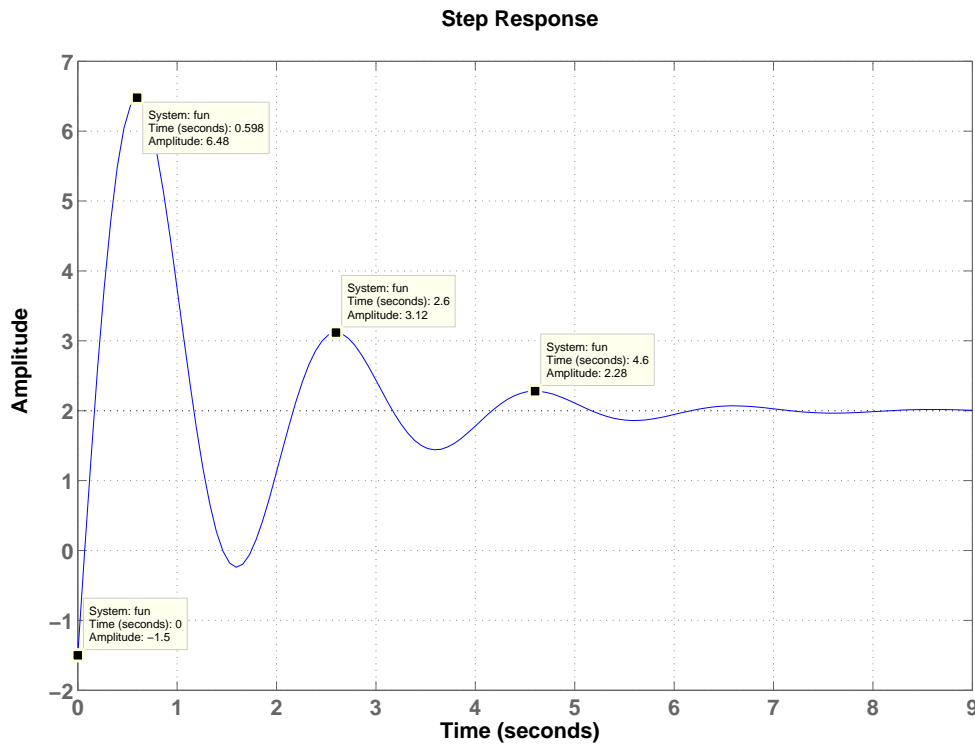


Figura 2: Risposta per ingresso a gradino del sistema controllato.

Soluzione

A.1 Indicando con $x = [\theta \ y_p \ \dot{\theta} \ \dot{y}_p]^T$ il vettore di stato ed imponendo le condizioni di equilibrio, $\dot{x} = 0$ con $F = 0$, $M = \bar{M}$ e $\theta = \bar{\theta}$ si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{\tau} - kL \cos(\bar{\theta}) (L \sin(\bar{\theta}) - 2\bar{y}) \\ 0 &= -g\bar{M} + 2k (L \sin(\bar{\theta}) - 2\bar{y}) \end{aligned}$$

da cui si ottiene il generico equilibrio

$$\begin{cases} \bar{y}_p = \frac{1}{2}L \sin(\bar{\theta}) - \frac{g\bar{M}}{4k} \\ \bar{\tau} = \frac{1}{2}g\bar{M}L \cos(\bar{\theta}) \end{cases} \quad (1)$$

A.2 Indicando con $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [\theta - \bar{\theta}, y_p - \bar{y}_p, \dot{\theta}, \dot{y}_p]^T$, il vettore delle variabili di stato traslate nell'equilibrio e con $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T = [\tau - \bar{\tau}, F]^T$ il vettore degli ingressi anch'essi traslati, il sistema non lineare scritto in forma di stato traslato attorno all'equilibrio è

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_3 \\ \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_4 \\ \dot{\tilde{x}}_3 = \frac{\bar{\tau} + \tilde{u}_1}{\sin^2(\bar{\theta} + \tilde{x}_1)L^2m_l} - \frac{L \cos(\bar{\theta} + \tilde{x}_1)}{\sin^2(\bar{\theta} + \tilde{x}_1)L^2m_l} (k(\sin(\bar{\theta} + \tilde{x}_1)L - 2(\bar{y}_p + \tilde{x}_2)) + b(\tilde{x}_3 \cos(\bar{\theta} + \tilde{x}_1)L - 2\tilde{x}_4) + \tilde{x}_4^2 \sin(\bar{\theta} + \tilde{x}_1)Lm_l) \\ \dot{\tilde{x}}_4 = -g + \frac{2k(\sin(\bar{\theta} + \tilde{x}_1)L - 2(\bar{y}_p + \tilde{x}_2))}{M} + \frac{2b(\tilde{x}_3 \cos(\bar{\theta} + \tilde{x}_1)L - 2\tilde{x}_4)}{M} + \frac{\tilde{u}_2}{M} \end{cases} \quad (2)$$

Linearizzando il sistema attorno all'origine, essendo questo l'equilibrio delle nuove variabili \tilde{x} e \tilde{u} , si ottiene il sistema linearizzato approssimato nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (3)$$

dove,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_l \sin^2 \bar{\theta}} - \frac{k\bar{y}_p(2+2\cos^2 \bar{\theta})}{m_l L \sin^3 \bar{\theta}} - \frac{2\bar{\tau} \cos \bar{\theta}}{m L^2 \sin^3 \bar{\theta}} & \frac{2k \cos \bar{\theta}}{L m_l \sin^2 \bar{\theta}} & \frac{-b \cos^2 \bar{\theta}}{m_l \sin^2 \bar{\theta}} & \frac{2b \cos \bar{\theta}}{m_l \sin^2 \bar{\theta}} \\ \frac{2kL \cos(\bar{\theta})}{M} & -\frac{4k}{M} & \frac{2bL \cos(\bar{\theta})}{M} & -\frac{4b}{M} \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sin^2(\bar{\theta})L^2m_l} & 0 \\ 0 & \frac{1}{M} \end{bmatrix}, \\ C &= [0 \ 1 \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

A.3 Sostituendo i valori numerici assegnati per un generico valore di $\bar{\theta}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1000}{\sin^2 \bar{\theta}} - \frac{666.67\bar{y}_p(2+2\cos^2 \bar{\theta})}{\sin^3 \bar{\theta}} - \frac{0.178\bar{\tau} \cos \bar{\theta}}{\sin^3 \bar{\theta}} & \frac{1333.33 \cos \bar{\theta}}{\sin^2 \bar{\theta}} & \frac{-200 \cos^2 \bar{\theta}}{\sin^2 \bar{\theta}} & \frac{400 \cos \bar{\theta}}{\sin^2 \bar{\theta}} \\ 1500 \cos(\bar{\theta}) & -2000 & 300 \cos(\bar{\theta}) & -400 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{0.0888889}{\sin^2(\bar{\theta})} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix} u, \\ y &= Cx = [0 \ 1 \ 0 \ 0] x. \end{aligned} \quad (4)$$

Questo si specifica, per i due valori richiesti, in:

- $\bar{\theta} = \frac{\pi}{6}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2986.92 & 4618.8 & -600 & 923.76 \\ 1299.04 & -2000 & 259.808 & -400 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.355556 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0].$$
(5)

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo u_1 (la coppia di attuazione) e l'uscita $y = x_2$ (la posizione della puleggia P) è

$$G_u(s) = \frac{92.376(s+5)}{(s+995)(s+5.015)(s+2.291)(s-2.289)}.$$
(6)

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di disturbo u_2 (la forza F) e l'uscita $y = x_2$ è

$$G_d(s) = \frac{0.1(s+595)(s+5.02)}{(s+995)(s+5.015)(s+2.291)(s-2.289)}.$$
(7)

Le funzioni di trasferimento sono instabili, in quanto presentano un polo a parte reale positiva. Questo si può interpretare col fatto che, nella posizione di linearizzazione, spostandosi dal valore di equilibrio (mantenendo, ad esempio, la coppia costante) il braccio aumenta se si diminuisce θ e, quindi, non si equilibra più la forza peso ed y_p va a divergere (verso valori negativi). Lo stesso succede nel caso in cui θ aumenti con conseguente diminuzione del braccio ed aumento indefinito di y_p .

- $\bar{\theta} = -\frac{\pi}{6}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3013.08 & 4618.8 & -600 & 923.76 \\ 1299.04 & -2000 & 259.808 & -400 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.355556 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{bmatrix},$$

$$C = [0 \ 1 \ 0 \ 0].$$
(8)

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo u_1 (la coppia di attuazione) e l'uscita $y = x_2$ (la posizione della puleggia P) è

$$G_{u,2}(s) = \frac{92.376(s+5)}{(s+995)(s+5.032)(s^2+0.001358s+5.225)}.$$
(9)

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di disturbo u_2 (la forza F) e l'uscita $y = x_2$ è

$$G_{d,2}(s) = \frac{0.1(s+594.9)(s+5.065)}{(s+995)(s+5.032)(s^2+0.001358s+5.225)}.$$
(10)

Le funzioni di trasferimento sono asintoticamente stabili, in quanto tutti i poli sono a parte reale strettamente negativa. Questo si può interpretare col fatto che, nella posizione di linearizzazione ed a differenza del caso precedente, se si diminuisce θ (o y_p) anche il braccio diminuisce, portando il sistema nuovamente verso la condizione di equilibrio. Considerazioni speculari valgono per l'aumento di θ (o aumento di y_p).

In figura 3 è riportato il diagramma a blocchi rappresentante il sistema con due ingressi (di controllo τ e di disturbo F) e l'uscita di misura $y = y_p$.

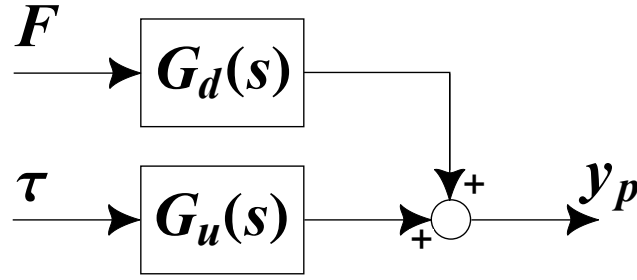


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema.

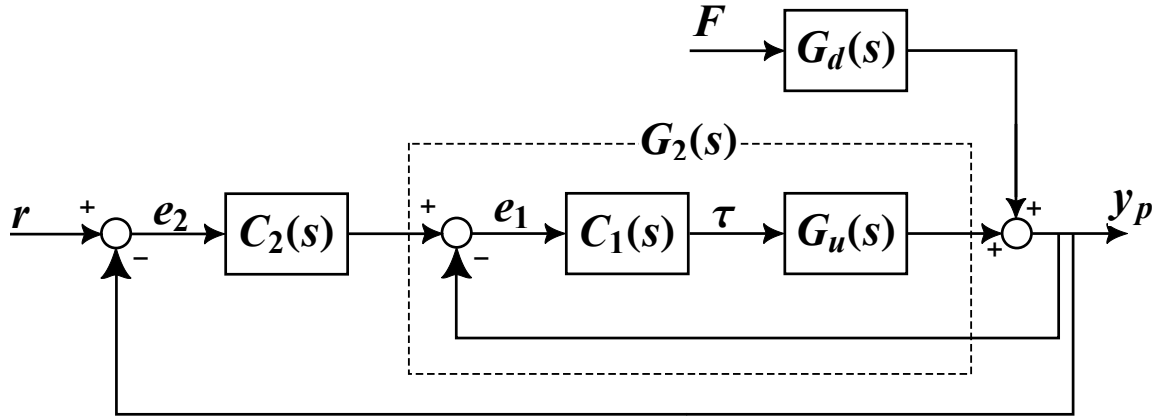


Figura 4: Diagramma a blocchi del sistema complessivo.

A.4 Poiché il sistema nel caso di $\bar{\theta} = \frac{\pi}{6}$ risulta instabile, si procede preliminarmente con il progetto di un controllore stabilizzante $C_1(s)$ per poi soddisfare le specifiche con un secondo controllore $C_2(s)$, realizzando quindi un controllo in cascata come rappresentato in figura 4.

Per la progettazione del controllore stabilizzante si utilizza il luogo delle radici. Come si osserva dalla figura 5, esso presenta un ramo che è completamente contenuto nel semipiano positivo. È necessario quindi attrarre questo ramo nel semipiano sinistro. Ciò può essere fatto inserendo in posizione opportuna due zeri complessi coniugati e a più alte frequenze due poli per rispettare la causalità. Un possibile controllore stabilizzante in grado di realizzare ciò è

$$C_1(s) = 10000 \frac{(s+3)^2}{(s+30)^2},$$

che è costituito da una rete anticipatrice complessa. In figura 6 è rappresentato il luogo delle radici del sistema $C_1(s)G_u(s)$, ovvero in seguito al progetto del controllore stabilizzante $C_1(s)$.

Il sistema una volta chiuso in retroazione con il controllore stabilizzante $C_1(s)$ è

$$G_2(s) = \frac{9.2376e05(s+5)(s+3)^2}{(s+996)(s+5.012)(s+2.037)(s+1.081)(s^2+55.9s+1640)}.$$

Adesso è dunque possibile progettare un controllore per soddisfare le specifiche. Tale controllore sarà del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

A.4.1 Si richiede che la puleggia P si sposti esattamente di 60 cm con una sovraelongazione massima $S\% = 100 \frac{3}{60} = 5\%$.

La successiva richiesta riguarda il tempo di assestamento al 2% ($100 \frac{1.2 \text{ cm}}{60 \text{ cm}}$) che non deve superare 0.5 sec.

Per il raggiungimento esatto della posizione richiesta è necessaria la presenza di un polo nell'origine nella funzione di anello: non essendo esso presente nella $G_2(s)$ si inserisce nel controllore.

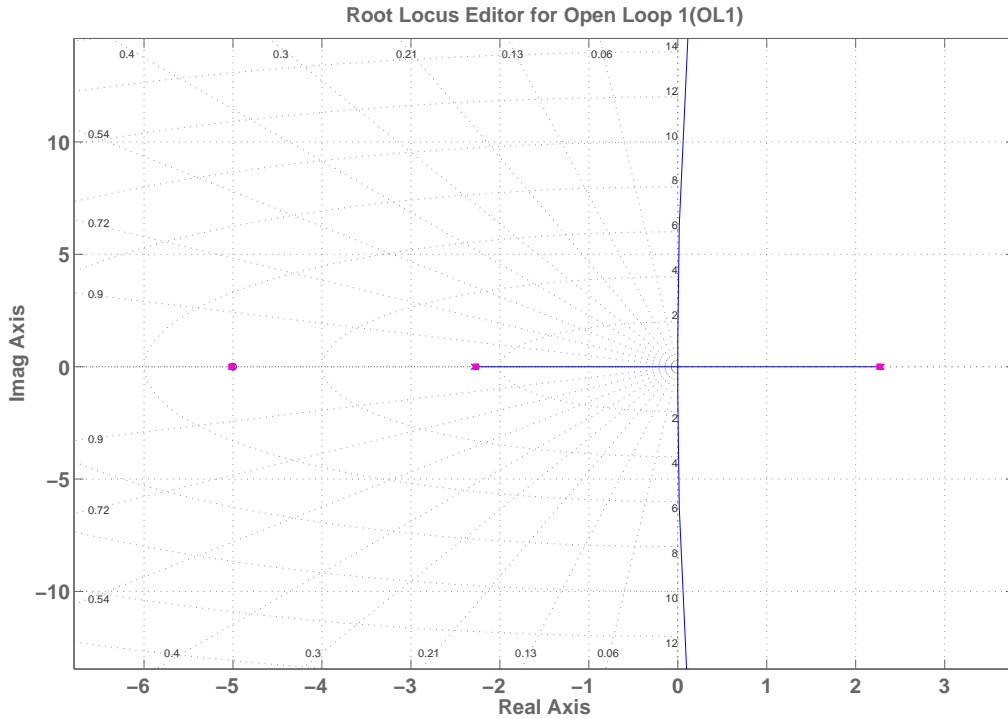


Figura 5: Luogo delle radici del sistema.

Si può poi procedere tentando di progettare un controllore capace di rendere la f.d.t. in anello chiuso ben approssimabile con un sistema a due poli dominanti per il quale le specifiche si traducono come segue:

$$S_{\%} = 100 e^{-\frac{\pi \delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 5\% \quad \implies \quad \delta > 0.69 \quad \implies \quad M_{\phi} > 69^{\circ}$$

$$\omega_T > \frac{4}{\delta T_{a2}} \simeq 11.6 \text{ rad/s.}$$

A.4.2 Si richiede che un disturbo di forza del tipo $F = -30 + 10 \sin(0.2\pi t) + 3 \cos(\frac{\pi}{2} - 0.4\pi t)$ non produca a regime uno spostamento della puleggia superiore a 5 mm, ovvero 0.005 m.

Essendo che, per soddisfare la specifica **A.4.1**, era stato inserito un polo nell'origine all'interno del controllore (quindi a monte del punto d'ingresso del disturbo), la componente costante del disturbo non avrà a regime alcun effetto sull'uscita.

Consideriamone dunque la sola parte sinusoidale, applicando il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento fra la trasformata $D(j\omega)$ del disturbo u_d e la trasformata dell'uscita $Y(j\omega)$ è data da

$$Y(j\omega) = \frac{G_{d2}(j\omega)}{1 + C_2(j\omega)G_2(j\omega)} D(j\omega) = \bar{G}(j\omega) D(j\omega), \quad (11)$$

dove

$$G_{d2}(j\omega) = \frac{G_d(j\omega)}{1 + C_1(j\omega)G_u(j\omega)} \quad (12)$$

è la f.d.t. tra il disturbo e l'uscita dopo l'inserimento del controllore stabilizzante.

La componente dell'uscita dovuta ad un disturbo sinusoidale ad una frequenza generica ω_k sarà quindi del tipo

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega_k)| |D(j\omega_k)| \sin(t + \angle \bar{G}(j\omega_k)). \quad (13)$$

Facendo riferimento al caso cautelativo in cui $\sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega_k)) = 1$, e considerando di aumentare il modulo $|\bar{G}(j\omega)|$ con il suo valore massimo nel range di frequenze d'interesse, il modulo della componente sinusoidale del disturbo da considerare è pari a $10 + 3 = 13$ N.

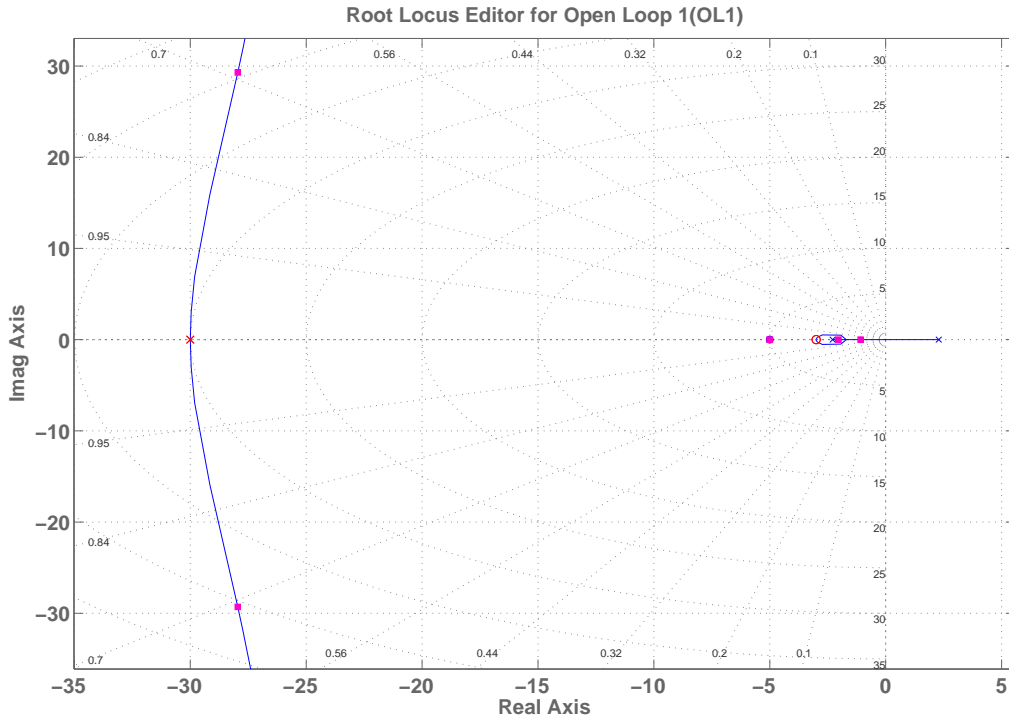


Figura 6: Luogo delle radici del sistema con controllore stabilizzante.

Il controllo deve dunque essere scelto in modo tale che

$$|\bar{G}(j\omega)| = \frac{|G_{d2}(j\omega)|}{|1 + C_2(j\omega) G_2(j\omega)|} \leq \frac{0.005}{13} \approx 0.0004 \quad \forall \omega \leq \omega_d, \quad (14)$$

dove ω_d viene scelta come la massima frequenza del disturbo, ovvero $0.4\pi \simeq 1.3$ rad/s.

Poiché a bassa frequenza è ragionevole applicare l'approssimazione $|1 + C_2(j\omega) G_2(j\omega)| \approx |C_2(j\omega) G_2(j\omega)|$, il controllore deve soddisfare

$$|C_2(j\omega) G_2(j\omega)| \geq \frac{|G_{d2}(j\omega)|}{0.0004}. \quad (15)$$

Notando infine che nel campo frequenziale d'interesse (vedi figura 7) si ha $|G_{d2}(j\omega)| < -36.5$ dB e $20 \log_{10}(0.0004) \approx -68$ dB, il guadagno d'anello per soddisfare questa specifica deve essere superiore a $-36.5 - (-68) = 31.5$ dB per frequenze minori di 1.3 rad/s.

La figura 8 mostra il diagramma di Bode di $G(s)$ con le specifiche sulla banda passante e sul guadagno che devono essere rispettate.

Il controllore può essere progettato inserendo come prima cosa il polo nell'origine, necessario per garantire errore a regime nullo. Al fine poi di rispettare le specifiche in bassa frequenza è necessario alzare opportunamente il guadagno d'anello. Per il margine di fase, si sceglie di inserire una coppia di zeri complessi coniugati che riducano l'effetto dei poli del sistema prossimi al taglio. Un ulteriore polo in alta frequenza viene inserito per causalità.

Un controllore che permette al sistema di rispettare tutte le specifiche, compresa la causalità, è il seguente:

$$C_2(s) = \frac{45.913(s^2 + 55.9s + 1640)}{s(s + 1004)}.$$

In figura 9 si vede come le specifiche siano ampiamente rispettate sul diagramma di Bode, mentre in figura 10 è riportata la risposta al gradino del sistema in ciclo chiuso. Come si può osservare le specifiche risultano rispettate. La f.d.t. del sistema in anello chiuso complessiva è la seguente:

$$G_c = \frac{4.2413e07(s + 3)^2(s + 5)(s^2 + 55.9s + 1640)}{(s + 1189)(s + 764.9)(s + 43.22)(s + 4.994)(s + 3.565)(s + 2.729)(s^2 + 55.88s + 1639)}. \quad (16)$$

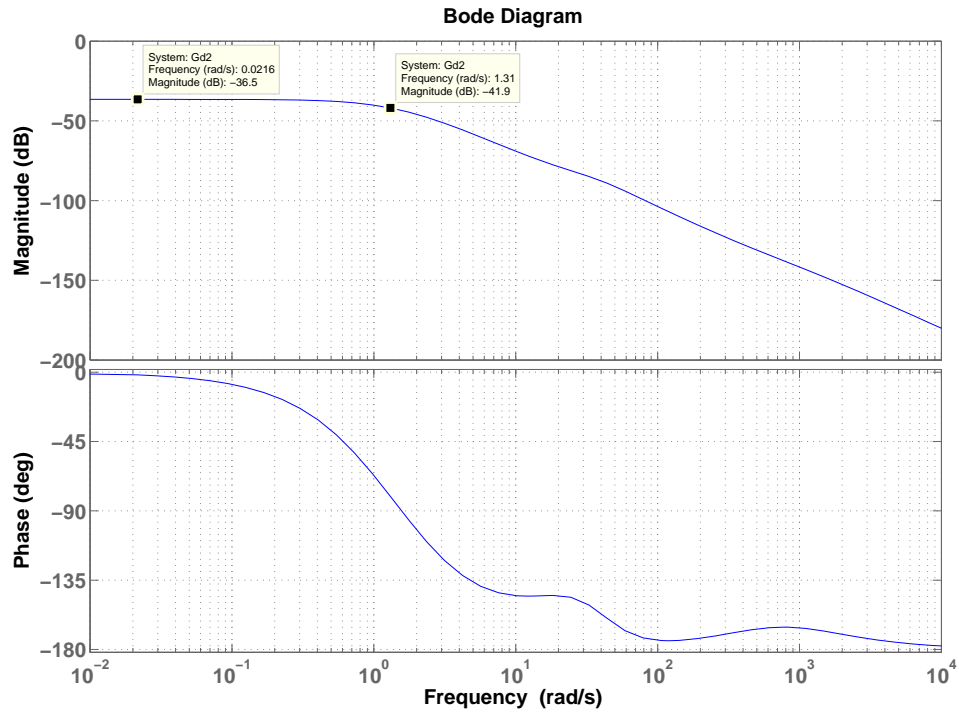


Figura 7: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_{d2}(s)$.

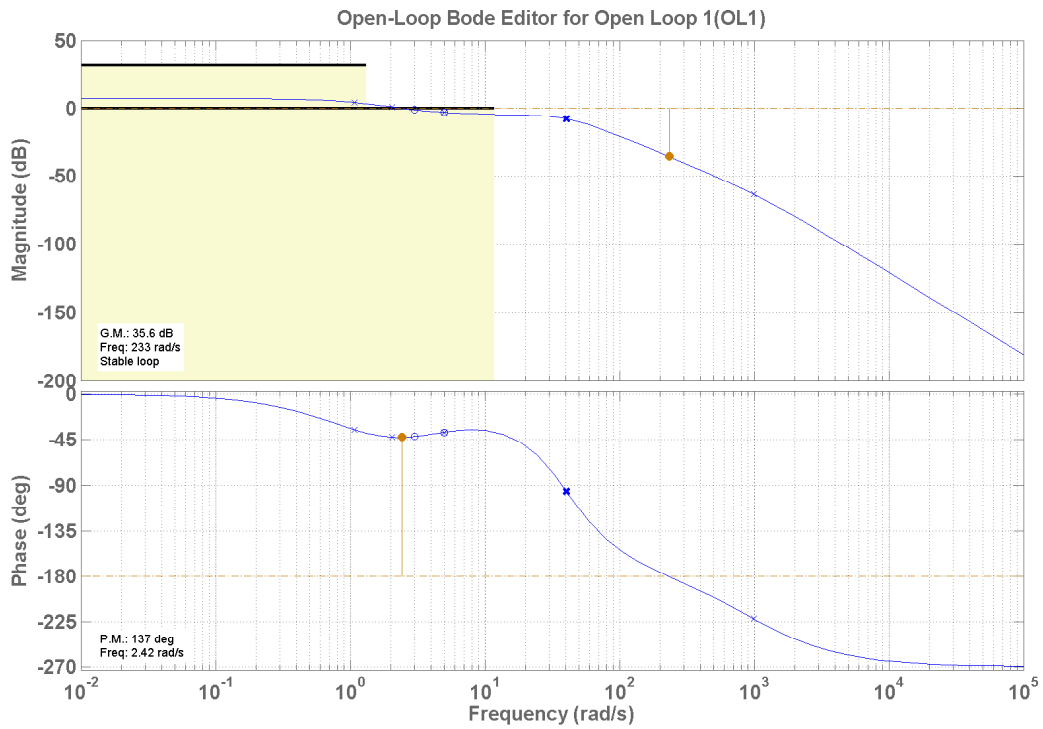


Figura 8: Diagrammi di Bode della f.d.t. $G(s)$ con le specifiche sulla banda passante e sul guadagno d'anello.

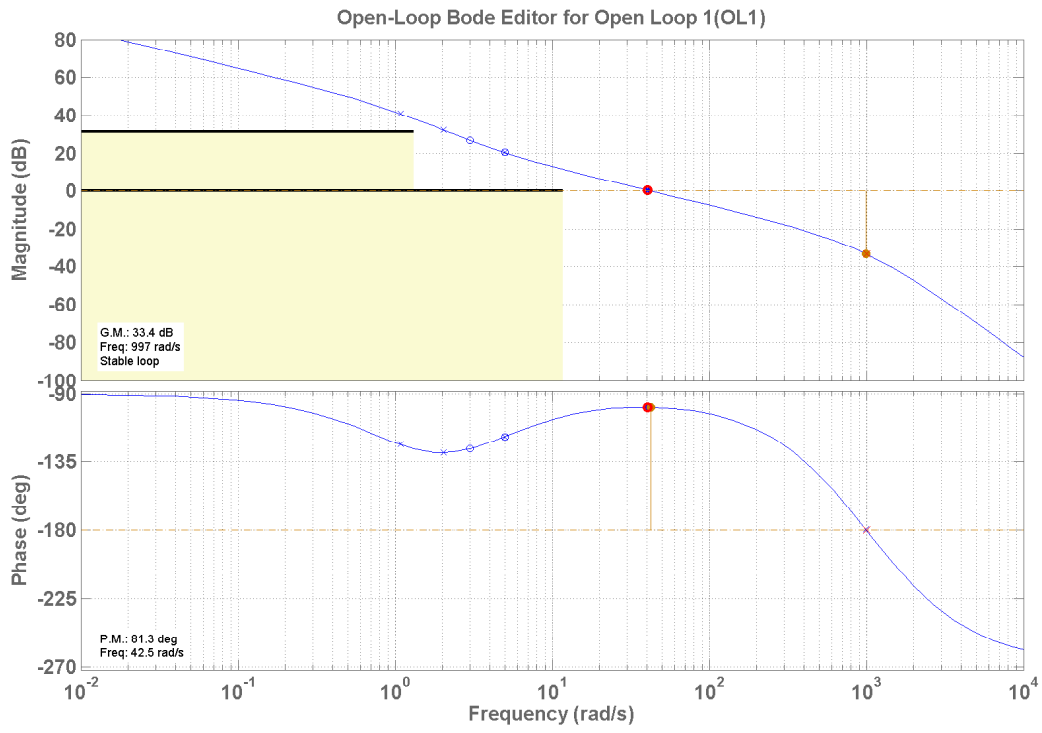


Figura 9: Diagrammi di Bode della f.d.t. $C(s)G(s)$.

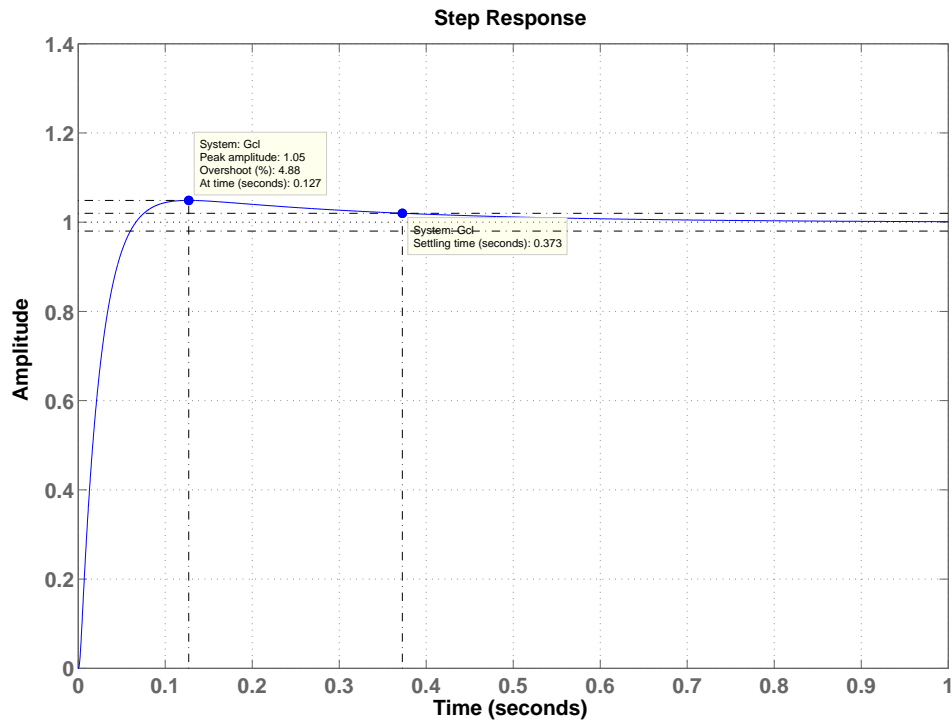


Figura 10: Risposta per ingresso a gradino del sistema controllato.

B Osservando la risposta a gradino in figura è evidente che il sistema possiede almeno due poli complessi coniugati. Inoltre, si osserva che il valore iniziale del sistema è diverso da zero per cui si può dire che l'eccesso poli zeri è nullo.

Una possibile f.d.t. è del tipo $G(s) = \rho \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$. Applicando il teorema del valore iniziale ricaviamo:

$$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) \frac{1}{s} = \rho = -1.5$$

Dal grafico si osserva che il periodo è $T = 2$ secondi. La parte immaginaria dei poli quindi è $\omega = 2\pi/T$. La parte reale dei poli si ottiene valutando i picchi della risposta nel periodo in esame; da cui:

$$\sigma = \frac{\log\left(\frac{-y(t_0)+y(\infty)}{y(t_0)-y(\infty)}\right)}{T} = -0.6931$$

da cui si ricava il denominatore della funzione. Questa metodologia è usata in genere per sistemi approssimabili a due poli dominanti senza considerare un eventuale contributo degli zeri. Di seguito si dimostra che è comunque corretta anche considerando uno zero (il caso con due zeri è del tutto analogo). La risposta di un sistema di secondo ordine senza zeri a seguito di un ingresso a gradino è

$$y(t) = 1 - Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi)$$

Se si considera il contributo di uno zero dovuto ad un numeratore $s + \frac{1}{\tau}$, la nuova risposta sarà, nel dominio di Laplace, pari a

$$Y_z(s) = sY(s) + \frac{1}{\tau}Y(s), \quad (17)$$

ovvero, nel dominio del tempo,

$$y_z(t) = \dot{y}(t) + \frac{1}{\tau}y(t). \quad (18)$$

Per cui:

$$y_z(t) = \frac{1}{\tau}(1 - Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi)) - A\alpha e^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi) - \beta A e^{\alpha t} \cos(\beta t + \phi)$$

Dato che le componenti sinusoidali sono isofrequenziali, esistono sicuramente K e ψ tali che:

$$B \sin(\beta t + \phi) + C \cos(\beta t + \phi) = K \sin(\beta t + \psi)$$

si sceglie di fatti $\psi = \arcsin\left(\frac{B}{K} \sin(\phi) + \frac{C}{K} \cos(\phi)\right)$. L'argomento dell'arcoseno deve essere di modulo inferiore ad uno, per cui il fattore K si determina come il picco di $B \sin(\beta t + \phi) + C \cos(\beta t + \phi)$ in modo da normalizzare tale risposta ad uno, ovvero $K = \sqrt{B^2 + C^2}$.

Utilizzando il teorema del valore finale per cui:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} = \rho \frac{z_1 z_2}{\omega_n^2} = 2$$

è necessario che uno degli zeri sia a fase non minima, essendo il segno del valore di regime positivo ed il segno di ρ negativo.