

Si consideri il sistema meccanico rappresentato in figura 1.

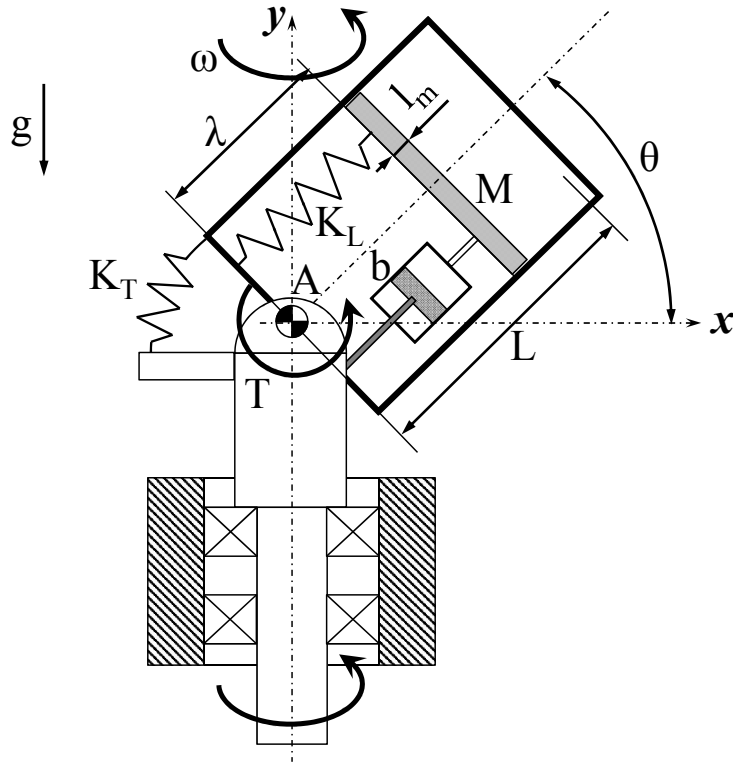


Figura 1: Sistema meccanico

Il sistema meccanico è costituito da un cilindro di massa trascurabile e lunghezza  $L$  che è vincolato ad un supporto attraverso un perno ( $A$ ) ed una molla torsionale di costante elastica  $k_T$  e posizione di riposo  $\theta_0$ ; tale supporto, di inerzia trascurabile, viene fatto ruotare attorno all'asse verticale  $y$  con velocità  $\omega$ . Sul perno  $A$  agisce inoltre una coppia di disturbo  $T$ .

All'interno del cilindro si trova un corpo di massa  $M$ , vincolato a muoversi lungo l'asse del cilindro stesso e collegato alla base attraverso una molla di costante elastica  $k_L$  e lunghezza a riposo  $\lambda_0$ , ed uno smorzatore di costante  $b$ . Tale corpo ha un'altezza (dimensione nella direzione assiale del cilindro) pari ad  $l_M$ .

Indicando con  $\theta$  l'angolo fra l'asse del cilindro e l'orizzontale (si noti che tale angolo è limitato nell'intervallo  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ), e con  $\lambda$  la distanza della massa  $M$  dalla base del cilindro (vedi figura 1), le equazioni che descrivono il comportamento dinamico del sistema sono:

$$\ddot{\theta} = -\frac{k_T(\theta - \theta_0)}{\lambda^2 M} - \omega^2 \cos \theta \sin \theta - \frac{2\theta \dot{\lambda}}{\lambda} - \frac{g \cos \theta}{\lambda} + \frac{T}{\lambda^2 M}$$

$$\ddot{\lambda} = -\frac{k_L(\lambda - \lambda_0)}{M} - \frac{b_L \dot{\lambda}}{M} + \lambda \omega^2 \cos^2 \theta + \lambda \dot{\theta}^2 - g \sin \theta$$

**A.1** Si determinino tutti gli equilibri del sistema che, per disturbo di coppia nullo ( $T = 0$ ), corrispondenti ad avere il cilindro in posizione orizzontale ( $\theta = 0$ ).

**A.2** Supponendo di disporre della misura della posizione  $\lambda$  del corpo di massa  $M$  all'interno del cilindro, si determini una rappresentazione in forma di stato del sistema linearizzato intorno all'equilibrio calcolato al punto precedente.

Si considerino i seguenti valori numerici:  $L = 1$  m;  $b = 15$  N s/m;  $k_T = 5$  N m/rad;  $k_L = 250$  N/m;  $M = 1$  kg;  $l_M = 0.026$  m;  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$  rad;  $\lambda_0 = 0.4$  m;  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>.

**A.3** Si determinino le funzioni di trasferimento tra l'ingresso  $u = \omega$  e l'uscita  $y = \lambda$ , e tra il disturbo  $u_d = T$  e l'uscita  $y = \lambda$ . Per fare ciò, nel caso in cui sia presente più di un equilibrio, si scelga quello con velocità di rotazione all'equilibrio  $\bar{\omega}$  maggiore.

Si discuta inoltre la stabilità dell'equilibrio del sistema linearizzato e se ne dia un'interpretazione fisica.

**A.4** Si determini una legge di controllo per  $\omega$  che agisca in modo da garantire che:

**A.4.1** il corpo di massa  $M$  nel cilindro si porti esattamente alla posizione di 0.934 m, evitando che sbatta alla base superiore del cilindro stesso, e che entri e rimanga nell'intervallo  $[0.926, 0.942]$  entro un tempo non superiore a 1.33 sec.

**A.4.2** in corrispondenza di un disturbo di coppia (in N m) del tipo

$$T = 1 + 0.5 \sin\left(2\pi 0.25t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.2 \cos\left(2\pi 0.4t + \frac{\pi}{6}\right)$$

non si abbia (a regime) uno spostamento della massa all'interno del cilindro superiore a 0.001 m.

Si riportino quindi:

- il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare;
- il controllore progettato;
- il diagramma a blocchi del sistema con il controllore progettato;
- la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

**B.1** Si progetti un controllore che stabilizzi la f.d.t.

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s - 10}{(s^2 + 9s + 36)(s - 4)},$$

riportando il luogo delle radici e descrivendo la procedura utilizzata.

**B.2** Dato il sistema la cui f.d.t. è

$$G(s) = \frac{s^2 + s + \gamma}{\alpha s^3 + s + 1}$$

ed il controllore proporzionale  $K = 1$ , si studi la stabilità del sistema controllato al variare dei parametri  $\alpha$  e  $\gamma$ .

## Soluzione

**A.1** Indicando con  $x = [\theta \ \lambda \ \dot{\theta} \ \dot{\lambda}]^T$  il vettore di stato ed imponendo le condizioni di equilibrio,  $\dot{x} = 0$  con  $T = 0$ ,  $\omega = \bar{\omega}$  e  $\theta = 0$  si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{k_T \theta_0}{\bar{\lambda}^2 M} - \frac{g}{\bar{\lambda}} \\ 0 &= -\frac{k_L(\bar{\lambda} - \lambda_0)}{M} + \bar{\lambda} \bar{\omega}^2 \end{aligned}$$

da cui si ottengono due possibili equilibri (uguali a meno del segno della velocità  $\bar{\omega}$ )

$$\begin{cases} \bar{\lambda} = \frac{k_T \theta_0}{M g} \\ \bar{\omega} = \pm \sqrt{\frac{k_L(\bar{\lambda} - \lambda_0)}{M \bar{\lambda}}} = \pm \sqrt{k_L \left( \frac{1}{M} - \frac{g \lambda_0}{\theta_0 k_T} \right)} \end{cases} \quad (1)$$

Per i successivi calcoli, si usa il valore di  $\bar{\omega}$  maggiore, ovvero quello di segno positivo.

**A.2** Indicando con  $\tilde{x} = [\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4]^T = [\theta - \bar{\theta}, \lambda - \bar{\lambda}, \dot{\theta}, \dot{\lambda}]^T$ , il vettore delle variabili di stato traslate nell'equilibrio e con  $\tilde{u} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2]^T = [\omega - \bar{\omega}, T]^T$  il vettore degli ingressi anch'essi traslati, il sistema non lineare scritto in forma di stato traslato attorno all'equilibrio è

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \dot{x}_1 \\ \dot{x}_4 = \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 = -\frac{k_T(x_1 - \theta_0)}{M(\bar{\lambda} + x_2)^2} - \cos(x_1) \sin(x_1) (\bar{\omega} + u_1)^2 - \frac{2x_3 x_4}{(\bar{\lambda} + x_2)} - \frac{g \cos(x_1)}{(\bar{\lambda} + x_2)} + \frac{u_2}{M(\bar{\lambda} + x_2)^2} \\ \dot{x}_4 = -\frac{k_L(x_2 + \bar{\lambda} - \lambda_0)}{M} - \frac{b_L x_4}{M} + (x_2 + \bar{\lambda}) \cos^2(x_1) (\bar{\omega} + u_1)^2 + (x_2 + \bar{\lambda}) x_3^2 - g \sin(x_1) \end{cases} \quad (2)$$

Linearizzando il sistema attorno all'origine, essendo questo l'equilibrio delle nuove variabili  $\tilde{x}$  e  $\tilde{u}$ , si ottiene il sistema linearizzato approssimato nella consueta forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A \tilde{x} + B \tilde{u} \\ y &= C \tilde{x} \end{aligned} \quad (3)$$

dove,

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\bar{\omega}^2 - \frac{k_T}{M \bar{\lambda}^2} & \frac{g M \bar{\lambda} - 2 k_T \theta_0}{M \bar{\lambda}^3} & 0 & 0 \\ -g & \bar{\omega}^2 - \frac{k_L}{M} & 0 & -\frac{b_L}{M} \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M \bar{\lambda}^2} \\ 2 \bar{\lambda} \bar{\omega} & 0 \end{bmatrix}, \\ C &= [0 \ 1 \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici assegnati, e considerando il punto di equilibrio di interesse si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x} = A x + B \tilde{u} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -80.1942 & -34.4358 & 0 & 0 \\ -9.81 & -187.357 & 0 & -15 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3.51027 \\ 8.4488 & 0 \end{bmatrix} \tilde{u}, \\ y = C x &= [0 \ 1 \ 0 \ 0] x. \end{aligned} \quad (4)$$

**A.3** La funzione di trasferimento tra l'ingresso di controllo  $\tilde{u}_1$  (la velocità di rotazione del cilindro) e l'uscita  $y = \tilde{x}_2$  (la posizione della massa all'interno del cilindro) è

$$G_u(s) = \frac{8.4488(s^2 + 80.19)}{(s^2 + 0.1737s + 78.95)(s^2 + 14.83s + 186)}. \quad (5)$$

La funzione di trasferimento tra l'ingresso di disturbo  $\tilde{u}_2$  (la coppia  $T$ ) e l'uscita  $y = \tilde{x}_1$  è

$$G_d(s) = \frac{-34.436}{(s^2 + 0.1737s + 78.95)(s^2 + 14.83s + 186)}. \quad (6)$$

Infine, in figura 2 è riportato il diagramma a blocchi rappresentante il sistema con due ingressi (di controllo  $\omega$  e di disturbo  $T$ ) e l'uscita di misura  $y = \lambda$ . Tutti i poli del sistema sono a parte reale negativa, per cui

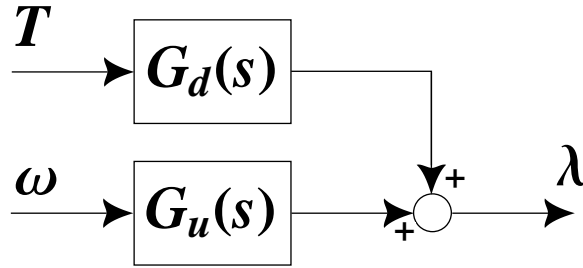


Figura 2: Diagramma a blocchi del sistema.

esso è asintoticamente stabile. I poli sono due coppie complesse coniugate, una delle quali sotto-smorzata e vicina all'asse immaginario.

**A.4** Poiché il sistema risulta già asintoticamente stabile, si può direttamente procedere al progetto di un controllore  $C(s)$  per soddisfare le specifiche, realizzando una retroazione come rappresentato in figura 3.

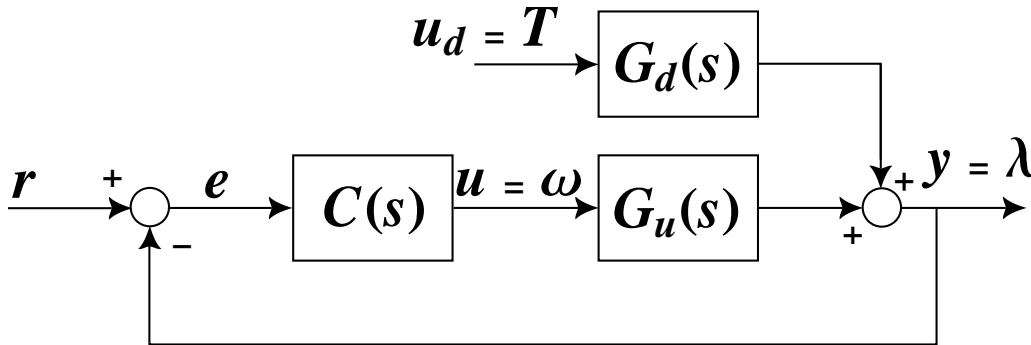


Figura 3: Diagramma a blocchi del sistema complessivo.

Il controllore per soddisfare le specifiche sarà del tipo

$$C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

**A.4.1** Si richiede che il corpo di massa  $M$  raggiunga esattamente la posizione di 0.934 m senza sbattere sul fondo del cilindro; essendo (sostituendo i valori numerici)  $\bar{\lambda} \simeq 0.534$  m, ed essendo il massimo valore ammissibile per la posizione della massa  $\lambda_{\max} = L - l_M = 0.974$  m, portarsi alla posizione di 0.934 m senza sbattere vuol dire fare un gradino di ampiezza 0.4 m con sovraelongazione massima  $S\% = 100 \frac{0.974 - 0.934}{0.934 - 0.534} = 10\%$ .

La successiva richiesta riguarda il tempo di assestamento al 2% ( $100 \frac{8}{0.4} \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ ) che non deve superare 1.3 sec.

Per il raggiungimento esatto della posizione di equilibrio è richiesta dunque la presenza di un polo nell'origine nella funzione di anello: non essendo esso presente nella  $G_u(s)$  si inserisce nel controllore. Si può poi procedere tentando di progettare un controllore capace di rendere la f.d.t. in anello chiuso ben approssimabile con un sistema a due poli dominanti per il quale le specifiche si traducono come segue:

$$S\% = 100 e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} \leq 10\% \quad \Rightarrow \quad \delta > 0.6 \quad \Rightarrow \quad M_\phi > 60^\circ$$

$$\omega_T > \frac{4}{\delta T_{a2}} = 5 \text{ rad/s}.$$

**A.4.2** Si richiede che un disturbo di coppia del tipo  $T = 1 + 0.5 \sin(2\pi 0.25t + \frac{\pi}{3}) + 0.2 \cos(2\pi 0.4t + \frac{\pi}{6})$  N m, non produca a regime uno spostamento della massa all'interno del cilindro superiore a 0.001 m.

Essendo che, per soddisfare la specifica **A.4.1**, era stato inserito un polo nell'origine all'interno del controllore (quindi a monte del punto d'ingresso del disturbo), la componente costante del disturbo non avrà a regime alcun effetto sull'uscita.

Consideriamone dunque la sola parte sinusoidale, applicando il teorema della risposta armonica. La funzione di trasferimento fra la trasformata  $D(j\omega)$  del disturbo  $u_d$  e la trasformata dell'uscita  $Y(j\omega)$  è data da

$$Y(j\omega) = \frac{G_d(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)} D(j\omega) = \bar{G}(j\omega) D(j\omega). \quad (7)$$

La componente dell'uscita dovuta ad un disturbo sinusoidale ad una frequenza generica  $\omega_k$  sarà quindi del tipo

$$y(t) = |\bar{G}(j\omega_k)| |D(j\omega_k)| \sin(t + \angle \bar{G}(j\omega_k)). \quad (8)$$

Facendo riferimento al caso cautelativo in cui  $\sin(\omega_k t + \angle \bar{G}(j\omega_k)) = 1$ , e considerando di maggiorare il modulo  $|\bar{G}(j\omega)|$  con il suo valore massimo nel range di frequenze d'interesse, il modulo della componente sinusoidale del disturbo da considerare è pari a  $0.5 + 0.2 = 0.7$  N m.

Il controllo deve dunque essere scelto in modo tale che

$$|\bar{G}(j\omega)| = \frac{|G_d(j\omega)|}{|1 + C(j\omega)G(j\omega)|} \leq \frac{0.001}{0.7} \approx 0.0014 \quad \forall \omega \leq \omega_d, \quad (9)$$

dove  $\omega_d$  viene scelta come la massima frequenza del disturbo, ovvero  $2\pi 0.4 \simeq 2.5$  rad/s.

Poiché a bassa frequenza è ragionevole applicare l'approssimazione  $|1 + C(j\omega)G(j\omega)| \approx |C(j\omega)G(j\omega)|$ , il controllore deve soddisfare

$$|C(j\omega)G(j\omega)| \geq \frac{|G_d(j\omega)|}{0.0014}. \quad (10)$$

Notando infine che nel campo frequenziale d'interesse (vedi figura 4) si ha  $|G_d(j\omega)| < -51.8$  dB e  $20 \log_{10}(0.0014) \approx -57$  dB, il guadagno d'anello per soddisfare questa specifica deve essere superiore a  $-51.8 - (-57) = 5.2$  dB per frequenze minori di 2.5 rad/s.

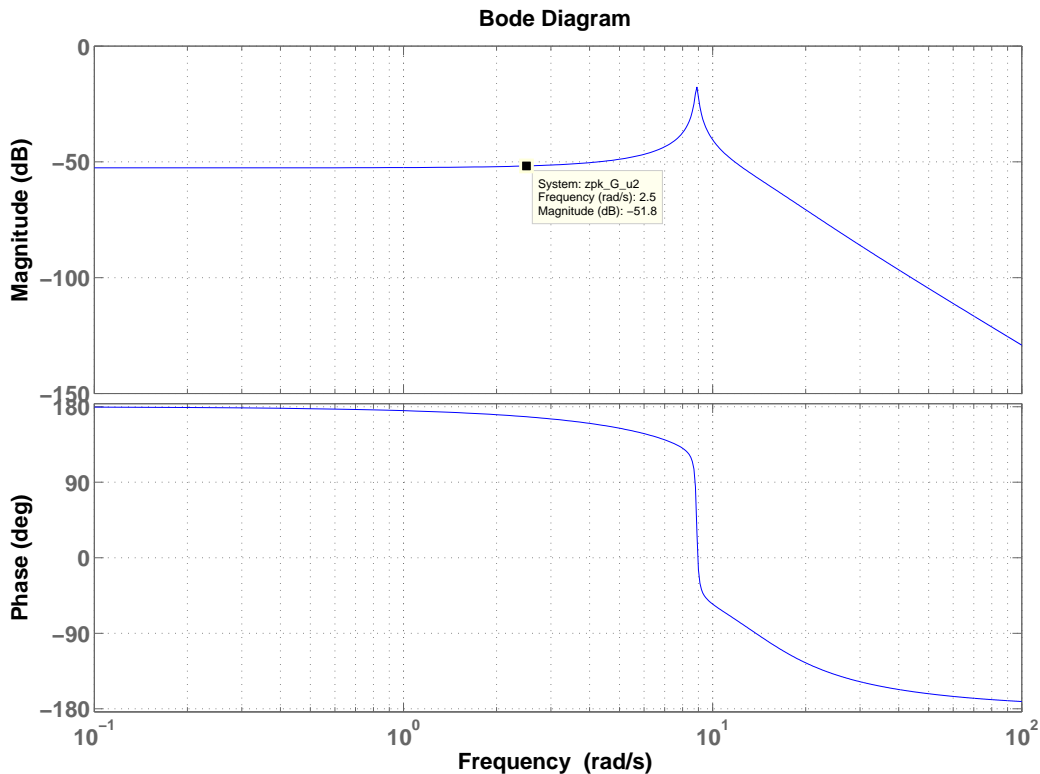


Figura 4: Diagramma di Bode della f.d.t.  $G_d(s)$ .

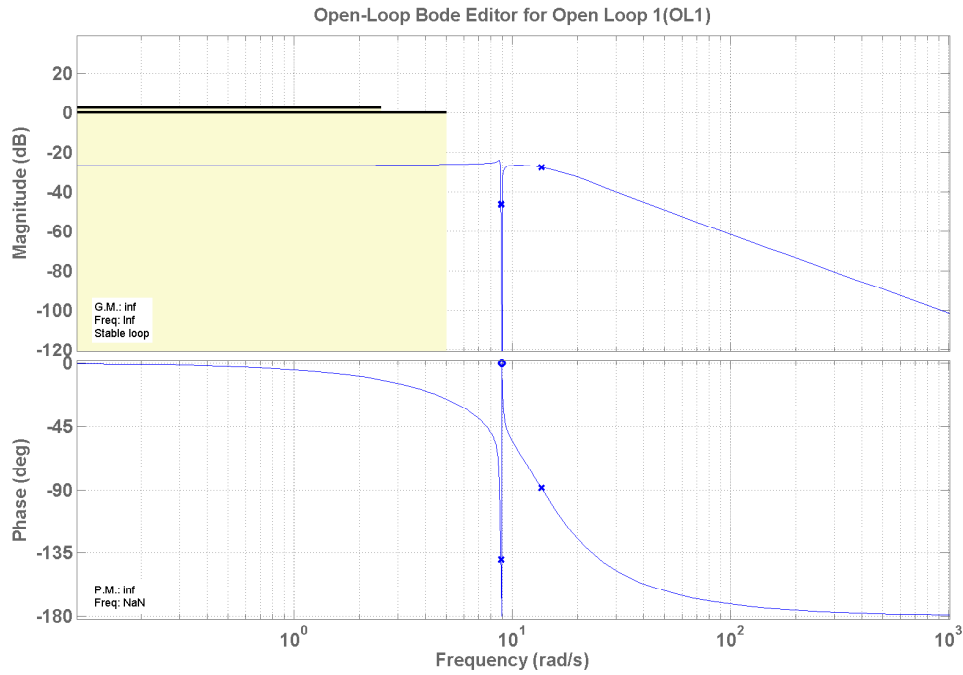


Figura 5: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $G(s)$  con le specifiche sulla banda passante e sul guadagno d'anello.

La figura 5 mostra il diagramma di Bode di  $G(s)$  con le specifiche sulla banda passante e sul guadagno che devono essere rispettate.

Il controllore può essere progettato inserendo come prima cosa il polo nell'origine, necessario per garantire errore a regime nullo. Al fine poi di rispettare le specifiche in bassa frequenza è necessario alzare opportunamente il guadagno d'anello. Con un semplice controllore di questo tipo

$$C(s) = \frac{110}{s}$$

le specifiche sono rispettate sul diagramma di Bode, ma guardando la risposta al gradino si può vedere come il tempo di assestamento non sia rispettato (essendo pari a quasi 10 sec.).

Per far sì che anche tale specifica venga rispettata, si vuole aumentare la banda passante del sistema, stando attenti a non renderlo instabile (tagliando dunque prima del picco di risonanza). Questo può essere ottenuto inserendo una coppia di zeri complessi coniugati all'incirca in corrispondenza dei poli più veloci del sistema, e ponendo un polo in alta frequenza per la causalità (ne basta uno dato che era già presente il polo nell'origine).

Un controllore che permette al sistema di rispettare tutte le specifiche, compresa la causalità, è il seguente:

$$C(s) = \frac{351.37 (s^2 + 14.82s + 186)}{s (s + 500)}.$$

In figura 7 è riportata la risposta al gradino. Come si può osservare le specifiche risultano rispettate. La f.d.t. del sistema in anello chiuso complessiva è la seguente:

$$G_c = \frac{2968.6 (s^2 + 80.19) (s^2 + 14.82s + 186)}{(s + 494) (s + 6.133) (s^2 + 0.05443s + 78.61) (s^2 + 14.82s + 186)}. \quad (11)$$

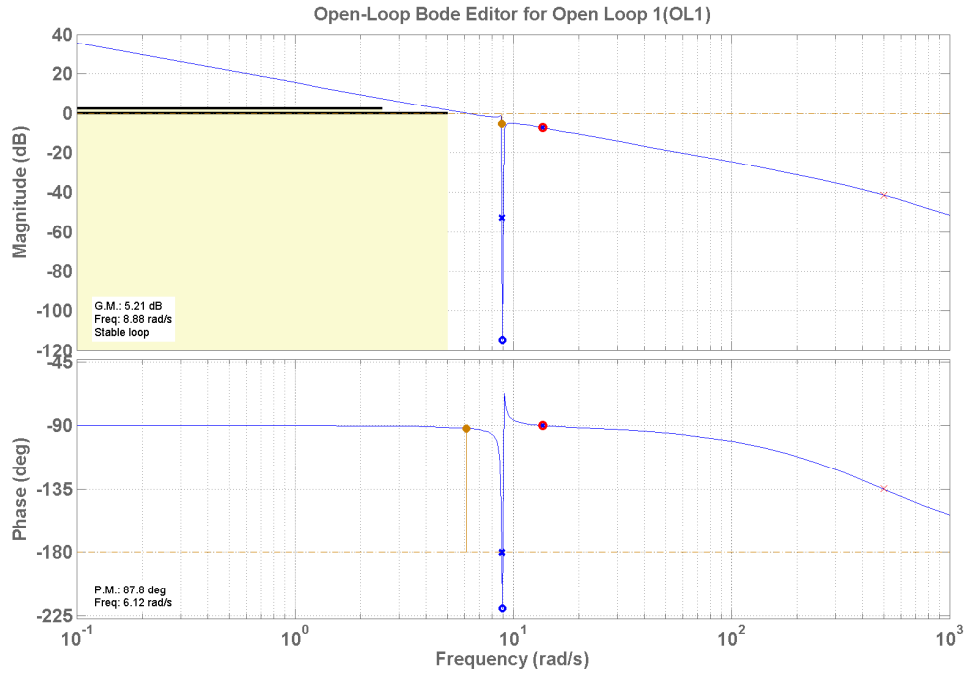


Figura 6: Diagrammi di Bode della f.d.t.  $C(s)G(s)$ .

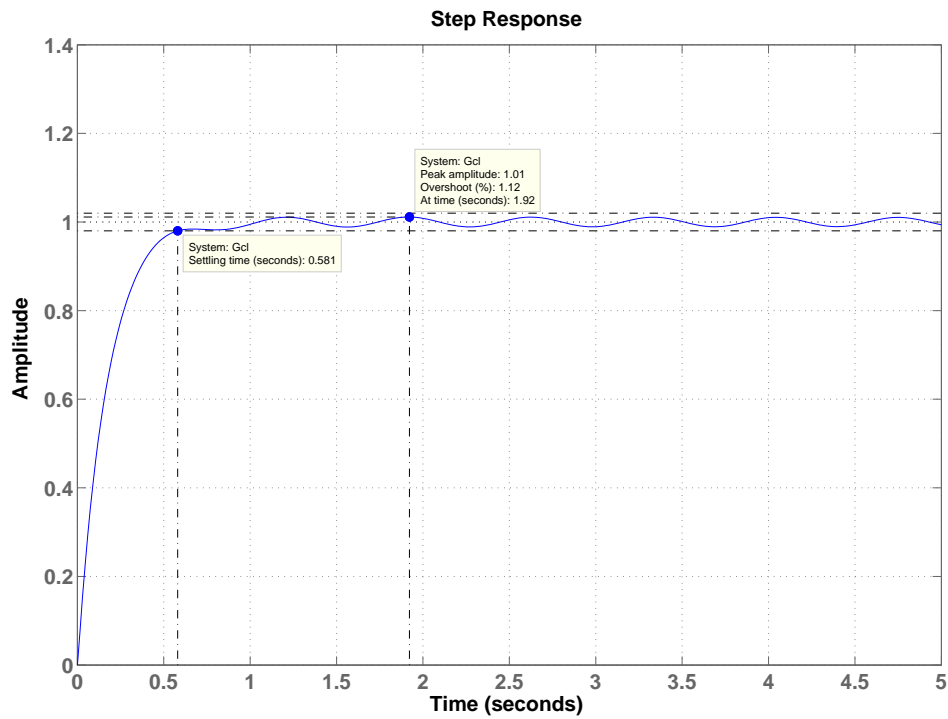


Figura 7: Risposta per ingresso a gradino del sistema controllato.

**B.1** La f.d.t. presenta un polo reale positivo ed uno zero a fase non minima, oltre ad un altro zero reale negativo ed una coppia di poli complessi coniugati a parte reale negativa.

Per controllarlo è necessario, come si vede dal luogo delle radici, inserire un polo a parte reale negativa nel controllore in modo da interrompere il ramo che, altrimenti, starebbe completamente nel semipiano destro. Una volta inserito tale polo in posizione opportuna (con ad esempio l'aiuto del comando *sisotool*), basta scegliere un guadagno idoneo alla stabilizzazione, ovvero che porti tutti i poli nel semipiano sinistro.

Un possibile controllore stabilizzante è il seguente:

$$C(s) = \frac{54}{s - 4}.$$

I luoghi delle radici prima e dopo l'inserimento del controllore sono riportati in figura 8.

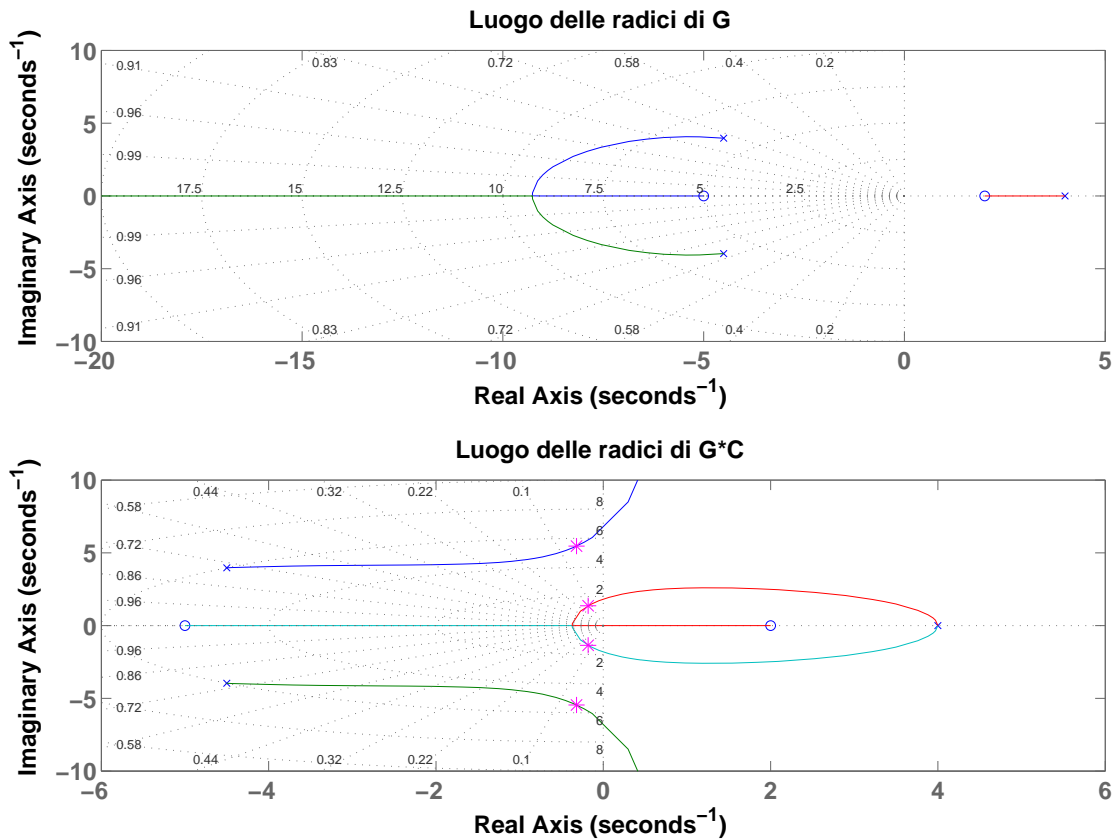


Figura 8: Luogo delle radici del sistema prima e dopo l'inserimento del controllore.

**B.2** Dato che vogliamo guardare alla stabilità del sistema controllato, si deve considerare la f.d.t. del sistema chiuso in retroazione con il controllore proporzionale

$$G_{cl} = \frac{K G(s)}{1 + K G(s)} = \frac{s^2 + s + \gamma}{\alpha s^3 + s^2 + 2s + \gamma + 1}$$

Si può studiare la stabilità al variare dei parametri usando, ad esempio, il criterio di Routh; per prima cosa, serve che tutti i coefficienti del polinomio caratteristico siano dello stesso segno (positivi in questo caso), quindi si hanno le condizioni

$$\begin{aligned} \alpha &> 0 \\ \gamma + 1 &> 0. \end{aligned}$$

Inoltre, si deve costruire la tabella di Routh e vedere che tutti i termini della prima colonna siano anch'essi tutti dello stesso segno (positivi)



$\alpha$	$2$
$1$	$\gamma + 1$
$2 - \alpha(\gamma + 1)$	$0$
$\gamma + 1$	$0$

da cui si ha l'ulteriore condizione

$$2 - \alpha(\gamma + 1) > 0.$$

Ricapitolando, il sistema è asintoticamente stabile per  $\gamma > -1$  e  $0 < \alpha < \frac{2}{\gamma+1}$ .

Considerando adesso il range d'interesse per i parametri, qualunque valore di  $\gamma \in [0, 3]$  è ammissibile, mentre  $\alpha$  deve essere strettamente positivo ed il suo massimo valore ammissibile dipende dal valore di  $\gamma$ : per  $\alpha < \frac{1}{2}$  il sistema è asintoticamente stabile per qualunque valore di  $\gamma$ .

Si noti che il valore  $\alpha = 0$  rende il sistema di partenza improprio, e non è quindi ammissibile.