

A Si consideri il modello dinamico di un *Series Elastic Actuator* (SEA, attuatore con elasticità in serie, figura 1).

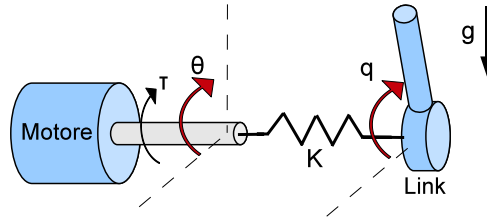


Figura 1: Modello del SEA.

L'attuatore è composto da un motore il cui albero è connesso attraverso un elemento elastico (molla torsionale) ad un link. Considerando una disposizione orizzontale dell'attuatore (con il link che conseguentemente agisce verticalmente) il modello risulta

$$\begin{cases} I\ddot{q} &= -T\dot{q} - K(q - \theta) - Mgl \cos(q) \\ B\ddot{\theta} &= -D\dot{\theta} - K(\theta - q) + \tau \end{cases}$$

dove è stato indicato con I l'inerzia del link, con T il coefficiente di attrito viscoso del link, con K la costante elastica della molla torsionale che collega l'albero motore al link e con q lo spostamento angolare del link; con B l'inerzia dell'albero motore, con D il coefficiente di attrito viscoso dell'albero motore e con θ la posizione angolare dell'albero motore. τ è la coppia motrice che agisce sull'albero del motore ed è considerata l'ingresso del sistema.

- a1) Supponendo che il sistema sia controllato agendo direttamente sulla coppia τ , si determini il regime di equilibrio in forma simbolica corrispondente al generico punto di lavoro $\tau = \bar{\tau}$ e se ne dia un'interpretazione fisica;
- a2) Supponendo di disporre della misura della deflessione ($\sigma = q - \theta$), e di poter comandare la coppia τ , si determini una rappresentazione lineare approssimata del sistema in forma di stato intorno agli equilibri trovati;

Si considerino i seguenti valori numerici: $B = 0.0575 \text{ Kg m}^2/\text{rad}$; $D = 2.5185 \text{ Kg m}^2/(\text{rad s})$; $M = 0.15 \text{ Kg}$; $l = 0.5 \text{ m}$; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$; $I = 0.2156 \text{ Kg m}^2/\text{rad}$; $T = 1.2 \text{ Kg m}^2/(\text{rad s})$; $\bar{\tau} = 0.2 \text{ Nm}$.

- a3) Si studi la stabilità del sistema nell'intorno dei due equilibri trovati, per $K = 200 \text{ Nm/rad}$ e successivamente al variare del parametro K ;
- a4) Per $K = 200 \text{ Nm/rad}$, si determini per ciascun equilibrio la funzione di trasferimento tra l'ingresso τ e l'uscita σ e si discutano le differenze;
- a5) Per il modello linearizzato attorno all'equilibrio con $\bar{q} > 0$, si determini una legge di controllo per la coppia τ che agisca in modo da garantire che, partendo da deflessione nulla, il SEA deve portarsi a regime ad un valore $\sigma = \bar{\sigma}$, raggiungendo un valore compreso nell'intervallo $\bar{\sigma} \pm 5\%$ in un tempo non superiore a 20 s e senza mai eccedere un valore limite di $1.2 \bar{\sigma}$.

Si riporti esplicitamente il controllore ottenuto, il diagramma di Bode con le relative specifiche da rispettare e la risposta al gradino ottenuta con le caratteristiche significative.

Soluzione

A a1) Il sistema è descritto da quattro variabili di stato q, θ, \dot{q} e $\dot{\theta}$. Dalla seconda equazione si ricava che $\bar{\theta} = \bar{q} + \frac{\bar{\tau}}{K}$, mentre dalla prima equazione si ricava che $\bar{q} = \arccos\left(\frac{\bar{\tau}}{Mgl}\right) + k\pi, k = 0, 1, 2, \dots$

Per $\bar{\tau} \leq Mgl$, il sistema ha quindi due punti di equilibrio simmetrici, dipendenti da $\bar{\tau}$, uno con $\bar{q} > 0$ e l'altro con $\bar{q} < 0$. Per valori $\bar{\tau} > Mgl$ non esistono equilibri possibili.

a2) Indicando con $\bar{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [q, \theta, \dot{q}, \dot{\theta}]^T$ le variabili di stato del sistema non traslato e con $u = \tau$ l'ingresso non traslato, si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -\frac{T}{I}x_3 - \frac{K}{I}(x_1 - x_2) - Mgl \cos(x_1) \\ \dot{x}_4 = -\frac{D}{B}x_4 - \frac{K}{B}(x_2 - x_1) + \frac{1}{B}u \end{cases}$$

Linearizzando attorno ai punti di equilibrio $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4] = [\bar{q}, \bar{\theta}, 0, 0]$ precedentemente trovati, si ottiene:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{K}{I} + \frac{Mgl}{I} \sin(\bar{x}_1) & \frac{K}{I} & -\frac{T}{I} & 0 \\ \frac{K}{B} & -\frac{K}{B} & 0 & -\frac{D}{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{B} \end{bmatrix} u$$

Infine, essendo l'uscita del sistema la deflessione, ovvero, ($\sigma = x_1 - x_2$), si ottiene

$$\sigma = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] x = Cx$$

a3) Sostituendo i valori numerici assegnati, e considerando il punto di equilibrio per $\bar{q} > 0$ si ottiene:

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3.39 - 4.64K & 4.64K & -5.56 & 0 \\ 17.39K & -17.39K & 0 & -43.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17.39 \end{bmatrix} u$$

$$\sigma = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] x = Cx.$$

Al fine di analizzare la stabilità del sistema al variare della costante K è necessario studiare il determinante della matrice $(sI - A)$ per fare in modo che abbia radici a parte reale negativa. Questo risulta

$$\det(sI - A) = s^4 + 49.36s^3 + (240.11 + 22.03K)s^2 + (300.93K - 148.5)s - 58.9K$$

Per la regola di Cartesio, condizione necessaria affinché un polinomio abbia tutte radici negative è che non ci siano variazioni di segno nei coefficienti. In particolare si dovrà avere

$$\begin{cases} -58.9K > 0 \\ 300.93K - 148.5 > 0 \\ 240.11 + 22.03K > 0 \end{cases}$$

Dalla prima disequazione otteniamo che K deve assumere un valore negativo, il quale però renderebbe non vera la seconda disequazione. Ne consegue che il polinomio caratteristico non può mai avere radici tutte negative e quindi che il sistema risulta essere instabile per qualunque valore assunto dalla costante K .

Nel caso invece in cui $\bar{q} < 0$ abbiamo

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.39 - 4.64K & 4.64K & -5.56 & 0 \\ 17.39K & -17.39K & 0 & -43.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17.39 \end{bmatrix} u$$

$$\sigma = [1 \quad -1 \quad 0 \quad 0] x = Cx.$$

Analogamente a quanto fatto precedentemente, andiamo a studiare il determinante della matrice $(sI - A)$. In questo caso abbiamo

$$\det(sI - A) = s^4 + 49.36s^3 + (246.91 + 22.03K)s^2 + (148.48 + 299.92K)s + 58.9K.$$

Si rende quindi necessario applicare il criterio di Routh-Hurwitz. La tabella risulta

	1	246.91 + 22.03K	58.9K
	49.36	148.48 + 299.92K	
	243.898 + 15.9464K	58.9K	
	$-\frac{4782.65(0.454154+K)(15.3358+K)}{-243.898-15.9464K}$		
	58.9K		

Imponendo che gli elementi della prima colonna siano di segno costante, otteniamo

$$\begin{cases} K > -15.2948 \\ K \in (-15.3358, -15.2948) \cup (-0.454154, \infty) \\ K > 0 \end{cases}$$

Si può quindi concludere che in questa configurazione, per $K > 0$, il sistema risulta essere sempre stabile.

- a4)** Considerando il valore di K assegnato e considerando l'equilibrio per $\bar{q} > 0$, la funzione di trasferimento tra l'ingresso τ e l'uscita σ diviene complessivamente

$$G_A(s) = \frac{-17.3913(s + 6.104)(s - 0.538)}{(s + 14.65)(s - 0.1881)(s^2 + 34.9s + 4144)}.$$

La funzione di trasferimento presenta due radici complesse coniugate a parte reale negativa $\lambda_{1,2} \approx -17.4511 \pm 61.9662i$, una radice reale a parte reale negativa $\lambda_3 \approx -14.65$ ed una radice reale positiva $\lambda_4 \approx 0.1881$.

La funzione di trasferimento presenta inoltre due zeri, uno a parte reale positiva, che introduce un'inversione iniziale della risposta a gradino e conseguentemente un ritardo, ed uno a parte reale negativa.

Considerando invece il caso in cui $\bar{q} < 0$, la funzione di trasferimento tra l'ingresso τ e l'uscita σ diviene

$$G_B(s) = \frac{-17.3913(s + 4.895)(s + 0.6709)}{(s + 14.29)(s + 0.1928)(s^2 + 34.88s + 4145)}$$

La funzione di trasferimento presenta due radici complesse coniugate a parte reale negativa $\lambda_{1,2} \approx -17.4407 \pm 61.9742i$, e due radici reali a parte reale negativa $\lambda_3 \approx -14.2917$, $\lambda_4 \approx -0.1928$. Gli zeri in questo caso sono entrambe negativi.

- a5)** A causa del polo positivo, il sistema in anello aperto risulta essere instabile. Conseguentemente, prima di progettare un controllore in grado di soddisfare sia le specifiche statiche che quelle dinamiche, si procede con il progetto di un primo controllore stabilizzante per realizzare successivamente un controllo in cascata come riportato in figura 2. La progettazione di un controllore stabilizzante si può effettuare utilizzando la tecnica del Luogo delle Radici.

A causa del segno negativo del guadagno del sistem, il luogo delle radici con retroazione negativa segue le regole del luogo inverso (fig. 3). Dalla analisi di questo luogo inverso si

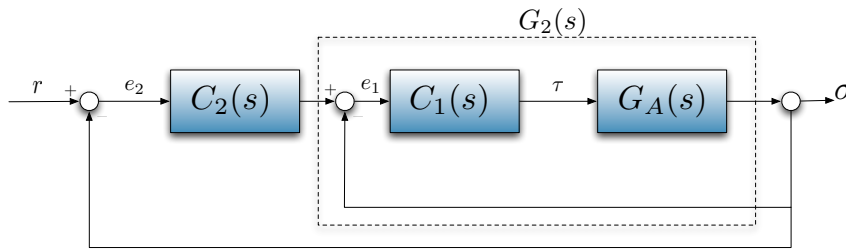


Figura 2: Schema a blocchi complessivo (controllo in cascata).

osserva che per valori sufficientemente elevati del guadagno del controllore K_c la radice sul ramo che inizia dal polo instabile attraversa l'asse immaginario portandosi a valori negativi. All'aumentare di K_c , peraltro, le radici che appartengono ai rami originati dai poli complessi coniugati dell'anello aperto tendono a divenire instabili. Anche se esiste un intervallo di valori per cui tutte le radici dell'anello chiuso sono stabili, questo è molto piccolo (all'incirca $200 < K_c < 223$).

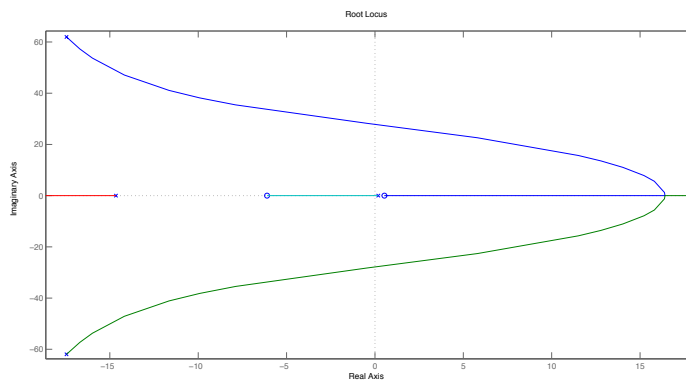


Figura 3: Luogo delle radici della f.d.t. $G(s)$.

Per avere una sintesi più agevole e robusta, è opportuno usare un controllore con uno zero positivo, ed un polo negativo.

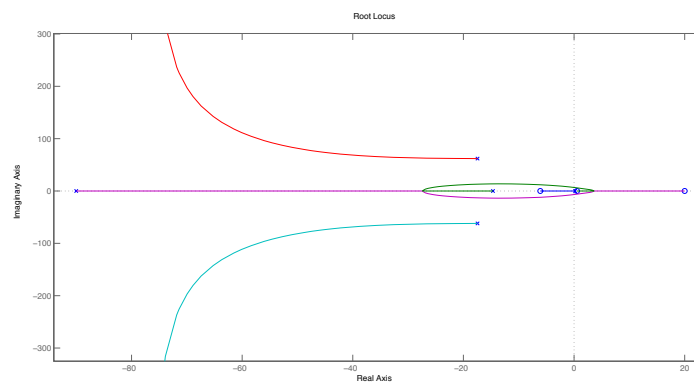


Figura 4: Luogo delle radici della f.d.t. $G(s)C_1(s)$.

Il luogo diretto corrispondente (fig. 4) permette di individuare un intervallo di stabilità più ampio (all'incirca $200 < K_c < 395$).

Scegliendo la f.d.t. del primo controllore come

$$C_1(s) = \frac{-1125(s - 20)}{(s + 90)}$$

la f.d.t. dell'anello chiuso interno nello schema a cascata diviene

$$G_2(s) = \frac{19565.2174(s-20)(s+6.104)(s-0.538)}{(s+0.08247)(s^2+6.443s+112.6)(s^2+132.8s+2.767e004)}$$

il cui diagramma di Bode è riportato in figura 5.

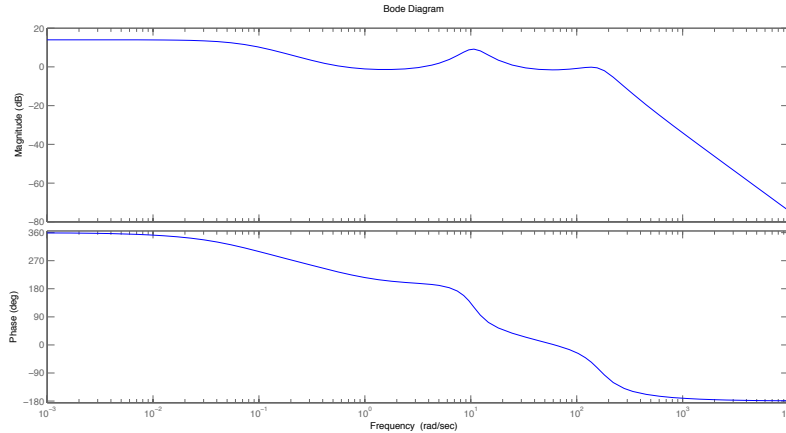


Figura 5: Diagramma di Bode della f.d.t. $G_2(s)$.

Il progetto di un controllore dell'anello esterno nello schema a cascata del tipo

$$C_2(s) = \frac{K_{c_2}}{s^t} C_0(s), \text{ con } C_0(0) \geq 1.$$

tale da soddisfare le specifiche statiche e dinamiche può essere fatto direttamente sui diagrammi di Bode in quanto la f.d.t. $G_2(s)$ sulla quale il controllore $C_2(s)$ agisce è asintoticamente stabile. Iniziamo con la scelta del tipo t e della costante di guadagno K_{c_2} del controllore basandoci sulle specifiche statiche. La prima specifica chiede errore nullo a regime per l'inseguimento a segnali costanti $\sigma(t) = \bar{\sigma}$. Per tale motivo, poichè $G_2(s)$ non possiede poli nell'origine, è necessario porre $t = 1$ nel controllore. La costante K_{c_2} non è fissata dalle specifiche statiche (lo potrebbe essere se ad esempio fosse richiesto un errore di inseguimento limitato ad un riferimento a rampa lineare). Il valore di K_{c_2} sarà quindi determinato successivamente per rispettare le altre specifiche.

Nella seconda parte della specifica è richiesto un tempo di assestamento al 5% del valore di regime inferiore a 20s, permettendo una sovraelongazione che al massimo sia pari al 20% del valore costante $\bar{\sigma}$ assegnato. Tentiamo di esaudire queste specifiche progettando un controllore che permetta di approssimare il sistema in anello chiuso con un modello a due poli dominanti le cui caratteristiche frequenziali siano

$$S = e^{\left(-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}\right)} \Rightarrow \delta = 0.46 \Rightarrow M_\phi \approx 45 \text{ deg}$$

$$\omega_T = \frac{3}{\delta T_a} \Rightarrow \omega_T \approx 0.33 \text{ rad/s}$$

Il diagramma di Bode con i vincoli sulla pulsazione di taglio ω_T sono riportati in figura 6.

Progetto del controllore.

Una possibile soluzione per il controllore $C_2(s)$ in grado di rispettare tutte le specifiche proposte consiste in una semplice azione anticipatrice con uno zero in $z = -0.04$ e un polo a due decadi di distanza in $p = -4$, ed ponendo il guadagno $K = 3$, ovvero

$$C_2(s) = 3 \frac{(s+0.04)}{s(s+4)}$$

per la quale il diagramma di Bode della funzione di trasferimento in anello aperto è riportato in fig. 7. Si noti che il controllore presenta un polo nell'origine (come richiesto per la specifica statica),

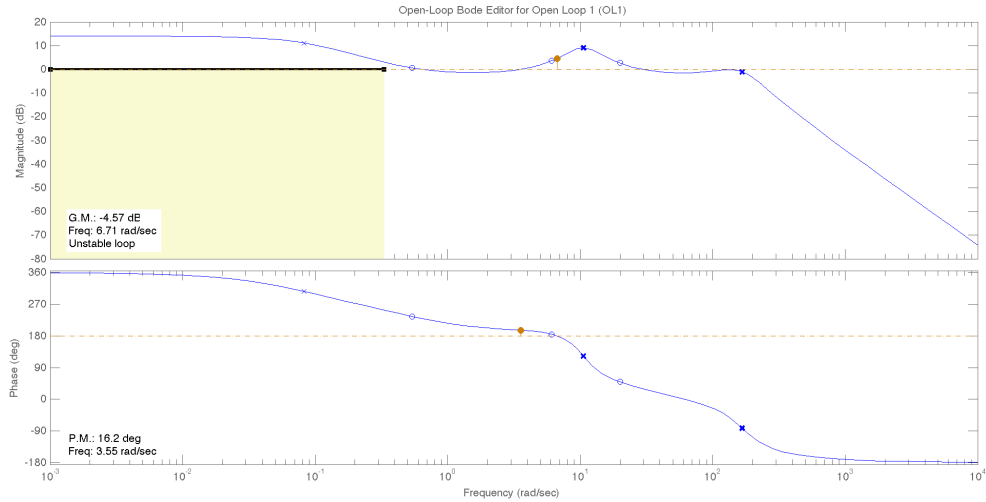


Figura 6: Diagramma di Bode della f.d.t. $G(s)$ con specifica sulla banda passante.

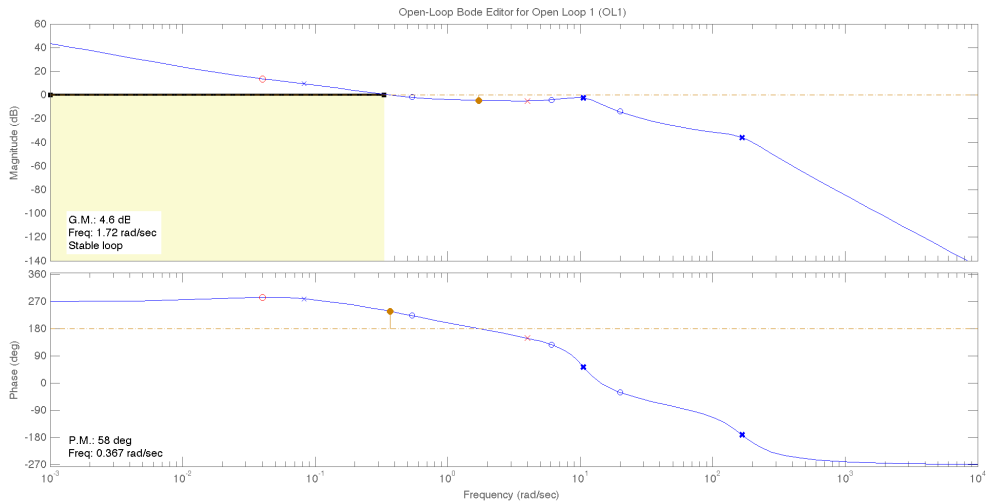


Figura 7: Diagramma di Bode risultante dal progetto della f.d.t. d'anello $C_2(s)G_2(s)$.

uno zero necessario per dare un incremento di fase ed alzare il diagramma di Bode per la specifica sulla pulsazione di taglio e sul margine di fase. In fig. 8 è riportato il diagramma di Bode del sistema controllato. In fig. 9 è invece riportata la risposta ad un ingresso a gradino del sistema controllato.

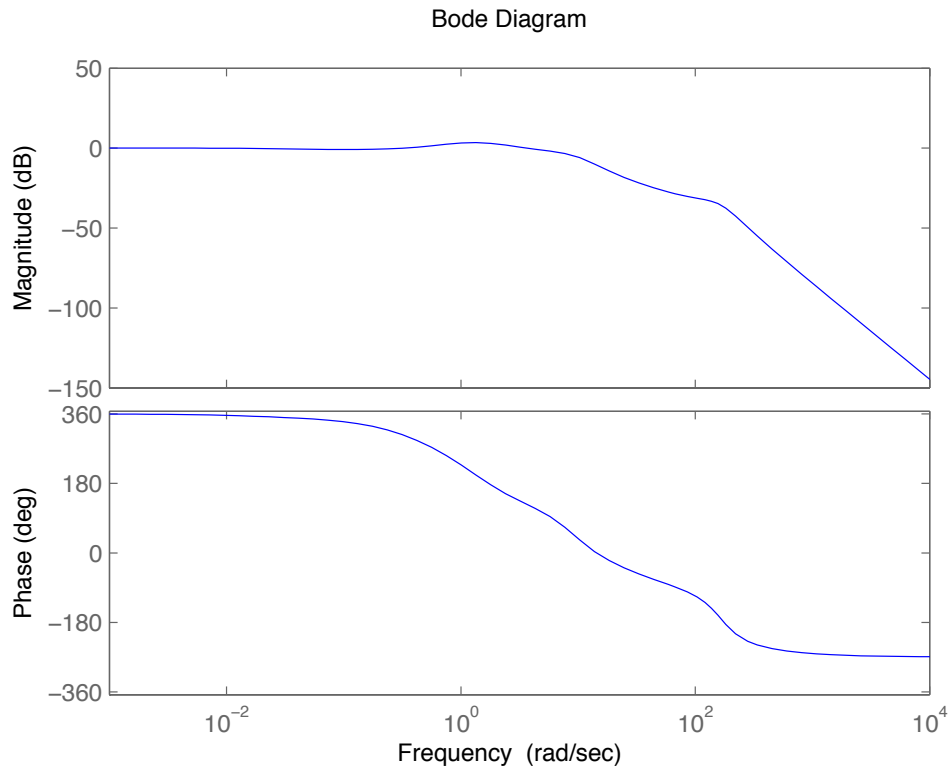


Figura 8: Diagramma di Bode del sistema controllato.

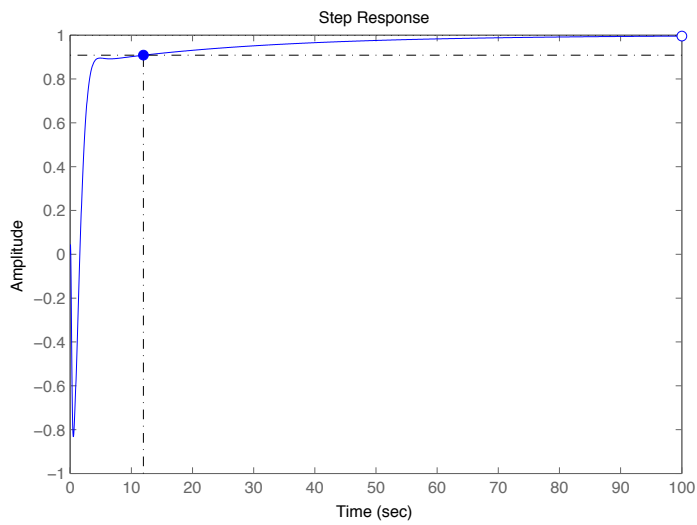


Figura 9: Risposta al gradino del sistema controllato.