

Numero di matricola

|   |   |                  |                 |                  |   |
|---|---|------------------|-----------------|------------------|---|
|   |   |                  |                 |                  |   |
| - | - | $= 10\alpha - 1$ | $= 10\beta - 1$ | $= 10\gamma - 1$ | - |

- A) Si consideri un esperimento nel quale, da un sistema il cui modello non è noto a priori, si ottenga una risposta al gradino unitario quale quella riportata in fig.???. Si determini qualitativamente un modello di sistema lineare che sia compatibile con i dati.

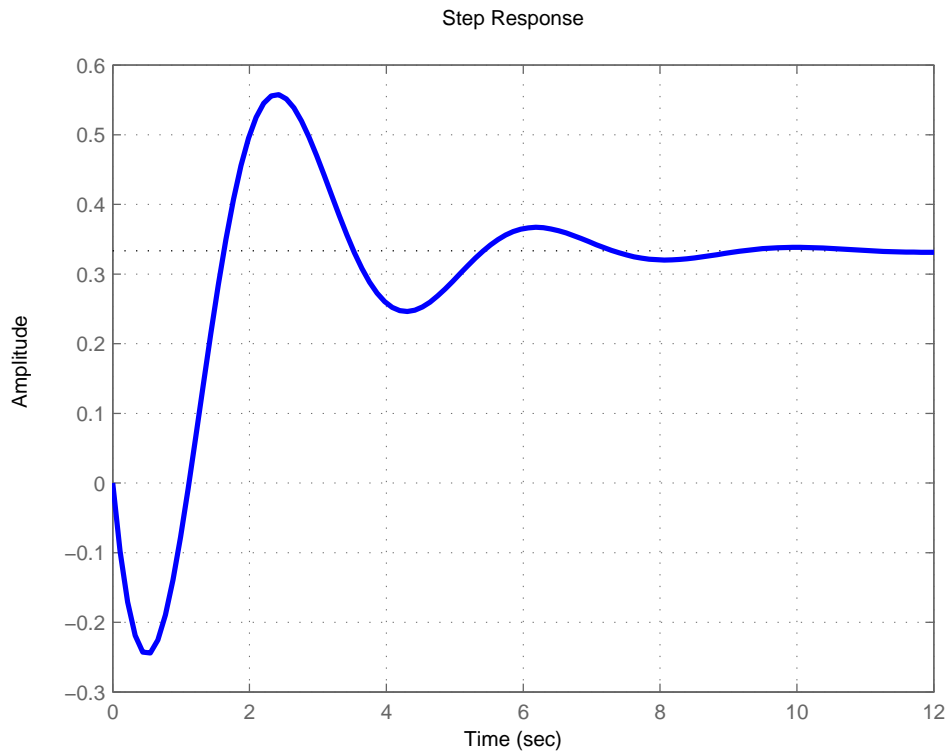


Figure 1: Risposta al gradino unitario di un sistema il cui modello non è noto

- B) Si disegni il diagramma di Nyquist del sistema caratterizzato dalla seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1 - \tau s}{s + 2},$$

e se ne discuta la stabilità in anello chiuso con un controllore proporzionale di guadagno unitario al variare di  $\tau$ .

- C) Si discretizzi il controllore con stato iniziale nullo

$$C(s) = \frac{s + 1}{s(s + 2)},$$

e si scriva un programma in un qualsiasi linguaggio di programmazione che lo implementa.

## Soluzione

- A) La risposta al gradino presenta delle oscillazioni smorzate e tende al valore di regime  $H \approx 0.3$ . Utilizzando il teorema del valor finale si deduce un guadagno statico pari a

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) \frac{1}{s} \approx 0.3 \approx \frac{1}{3},$$

mentre la presenza di oscillazioni smorzate indica la esistenza di una coppia di poli complessi coniugati, quindi un denominatore almeno del secondo ordine. Una funzione di trasferimento del tipo

$$G(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{\frac{s^2}{3} + \frac{s}{3} + 1}$$

presenterebbe la risposta al gradino riportata in fig.??.

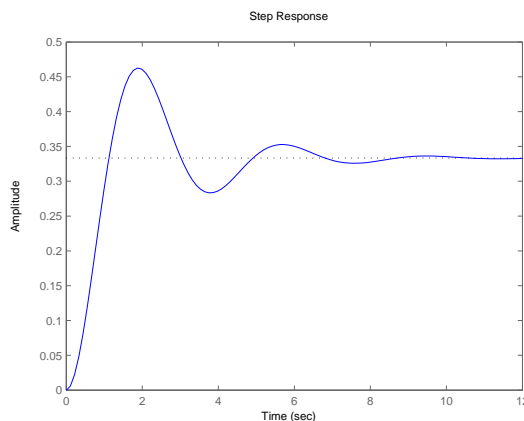


Figure 2: Risposta al gradino del sistema lineare  $G(s) = \frac{1}{3} \frac{1}{\frac{s^2}{3} + \frac{s}{3} + 1}$

Come si nota gli andamenti delle due risposte al gradino presentano delle andamenti diversi in special modo nei primi istanti del transitorio. Ciò è dovuto alla presenza di zeri, che impongono differenze nei valori delle derivate delle risposte al gradino in  $t = 0$ . Poniamo quindi una struttura della funzione di traferimento

$$G(s) = G(s) = \frac{1}{3} \frac{1 + \rho s}{\frac{s^2}{3} + \frac{s}{3} + 1}.$$

Un valore opportuno per  $\rho$  si ottiene utilizzando il teorema del valore iniziale applicato alla derivata della risposta al gradino  $\dot{y}(t)$ , cioè

$$\lim_{t \rightarrow 0} \dot{y}(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} s(sG(s)) \frac{1}{s}$$

che deve assumere un valore negativo, quindi  $\rho < 0$ .

La f.d.t. che ha generato l'esempio è

$$G(s) = G(s) = \frac{1}{3} \frac{1 - s}{\frac{s^2}{3} + \frac{s}{3} + 1}.$$

- B) La funzione di traferimento in forma di Bode risulta

$$G(s) = \frac{1}{2} \frac{1 - \tau s}{1 + \frac{s}{2}} \rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{2} \frac{1 - j\tau\omega}{1 + \frac{j\omega}{2}}$$

che presenta un polo stabile in  $s = -2$  e uno zero in  $s = \frac{1}{\tau}$  e un guadagno statico  $K = \frac{1}{2}$ : il diagramma di Nyquist dovrà avere fase nulla alle basse frequenze, mentre alle alte frequenze avrà fase  $\phi = -\pi$ . Il punto iniziale del diagramma si ottiene con il limite

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = \frac{1}{2},$$

mentre il valore finale si ottiene con il limite

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = -\tau.$$

Infine, la fase varierá monotonamente dal valore  $\phi = 0$  al valore  $\phi = -\pi$ .

Il sistema è stabile in anello aperto. Quindi, la condizione per la quale esso rimanga asintoticamente stabile in anello chiuso è che il diagramma completo non circonda né attraversi il punto  $(-1 + j0)$ . Dall'andamento del diagramma, si ha che questo avviene se  $-\tau > -1$ , da cui la condizione di stabilità in anello chiuso  $\tau < 1$ .

I diagrammi di Nyquist relativi alla  $G(j\omega)$  per i valori  $\tau = 0.5$  (stabile asintoticamente in anello chiuso) e  $\tau = 1.5$  (instabile in anello chiuso) sono riportati in fig.??.

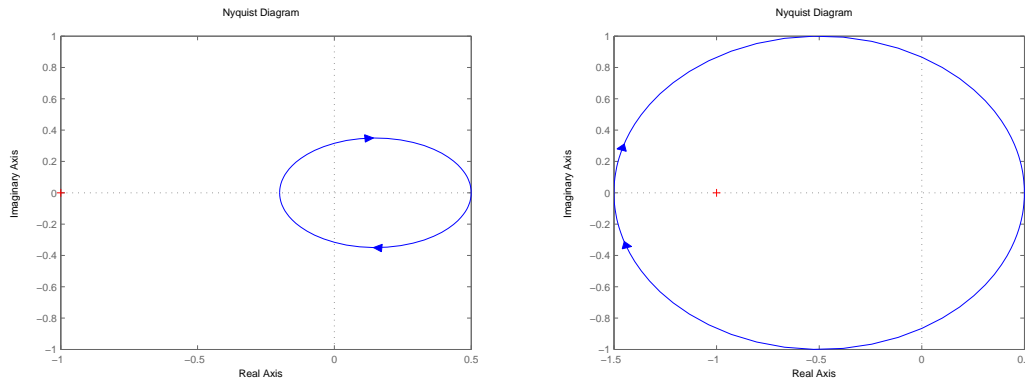


Figure 3: Diagrammi di Nyquist della  $G(j\omega)$  per i valori  $\tau = 0.5$  (sinistra) e per  $\tau = 1.5$ .

- C) Il controllore ha in ingresso l'errore  $e(t)$  e in uscita il controllo  $u(t)$ . Per prima cosa, è necessario ricavare l'equazione differenziale del controllore. Partendo da

$$s(s+2)U(s) = (s+1)E(s)$$

si ottiene per anti-trasformazione, e supponendo nulle le condizioni iniziali, l'equazione in forma normale

$$\ddot{u}(t) + 2\dot{u}(t) = \dot{e}(t) + e(t).$$

A questo punto, è immediato ottenere la rappresentazione del controllore  $C(s)$  in forma canonica di controllo

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(0) = [0 \ 0]^T, \end{cases}$$

con matrici  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $B = [0 \ 1]^T$ ,  $C = [1 \ 1]$ ,  $D = 0$ . Discretizzando la variabile tempo e indicando con  $i$  il generico istante di calcolo, è possibile approssimare la derivata prima del vettore di stato  $x$  con una differenza finita

$$\dot{x}(i) \approx \frac{x(i+1) - x(i)}{T}$$

dove  $T$  rappresenta il periodo di campionamento. Si ottiene quindi il sistema tempo discreto

$$\begin{cases} x(i+1) = A_D x(i) + B_D e(i) \\ u(i) = C_D x(i) + D_D e(i) \\ x(0) = [0 \ 0]^T, \end{cases}$$

dove  $A_D = (AT + I) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 - 2T \end{bmatrix}$ ,  $B_D = BT = [0 \ T]$ ,  $C_D = C = [1 \ 1]$ ,  $D_D = D = 0$ , e  $I$  rappresenta la matrice identità.

Una funzione che implementa su un calcolatore il controllore, e che deve essere eseguita ad ogni istante di campionamento, risulterebbe scritta in uno pseudo-linguaggio di programmazione nel seguente modo

```

constant T=0.001;    Tempo di campionamento
constant T_max = 10; Durata della simulazione
constant c1= 1;     Coefficienti del vettore di uscita
constant c2= 1;
constant x1_0=0;
constant x2_0=0;
var x1=x1_0;
var x2=x2_0;
var x1_buffer, x2_buffer;

u=x1+x2;
write(u,output);    Uscita del controllore (controllo)
e=read(input);     Ingresso del controllore (errore di inseguimento)
x1_buffer=x1;     Salvataggio dello stato in variabili d'appoggio
x2_buffer=x2;
x1=x1_buffer+T*x2_buffer; Evoluzione dello stato
x2=(1-2T)x2_buffer;

```

Utilizzando il linguaggio Matlab, il codice sopra riportato può essere riscritto nel seguente modo

```

...
Workspace
...
T=0.001;
A=[0 1 0;0 -2];
B=[0;1];
C=[1,1];
D=0;
Ad=T*A+eye(2);
Bd=T*B;
Cd=C;
Dd=D;
x= [0;0]

global x;
global T;
global Ad;
global Bd;
global Cd;
global Dd;
...
Fine Workspace
...

% File controllore_discreto.m
function [controllo] = controllore_discreto(errore)
global x;
global T;
global Ad;
global Bd;
global Cd;
global Dd;

controllo = C*x; %Dd*errore
x = Ad*x+Bd*errore;

%end file

```

Questo programma può essere richiamato direttamente da Simulink nel corso di una simulazione

utilizzando il blocco “Matlab Function”, come riportato nella figura fig.??.

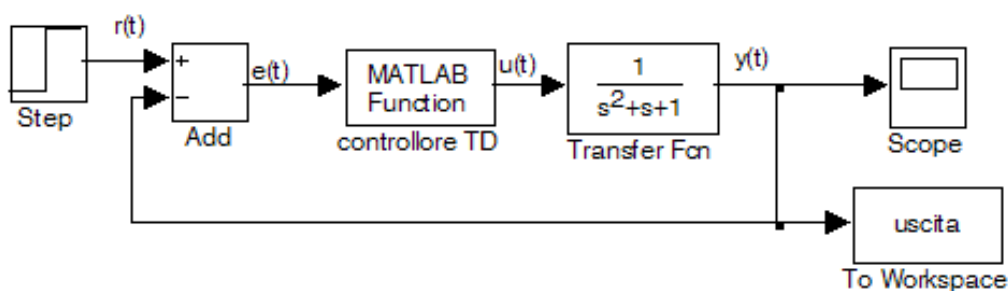


Figure 4: Esempio di schema Simulink che permette di utilizzare funzioni scritte in codice Matlab all'interno di una simulazione

Si noti l'utilizzo di variabili dichiarate “global” il cui valore assunto ad un istante di campionamento viene salvato nello spazio di lavoro di Matlab e può essere richiamato dalla funzione all'istante di campionamento successivo.

Come esempio, in fig.?? si riportano i grafici relativi alla simulazione dell'inseguimento al gradino di un sistema caratterizzato dalla fdt  $G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}$  e retroazionato con il controllore tempo continuo (sinistra) e con il controllore discretizzato (destra) implementato con il codice in linguaggio Matlab.

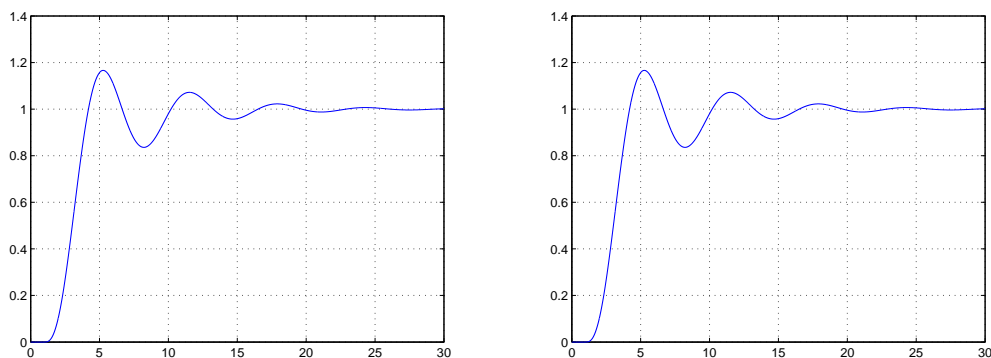


Figure 5: Risposta al gradino di un sistema lineare controllato con il controllore TC (sinistra) e con il controllore TD (destra)