Regolazione e Controllo —— 17 Febbraio 2005

Numero di matricola						
	–	–	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	–

A) Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore rappresentato in fig. 1, in cui i parametri di massa m, costante elastica della molla k e coefficiente di attrito viscoso b non sono noti. Eccitando il sistema, a partire dalla configurazione di riposo, con una forza f a gradino di ampiezza 100 N, si ottiene la risposta riportata in fig. 1. Si ricavi una stima dei parametri m, b e k.

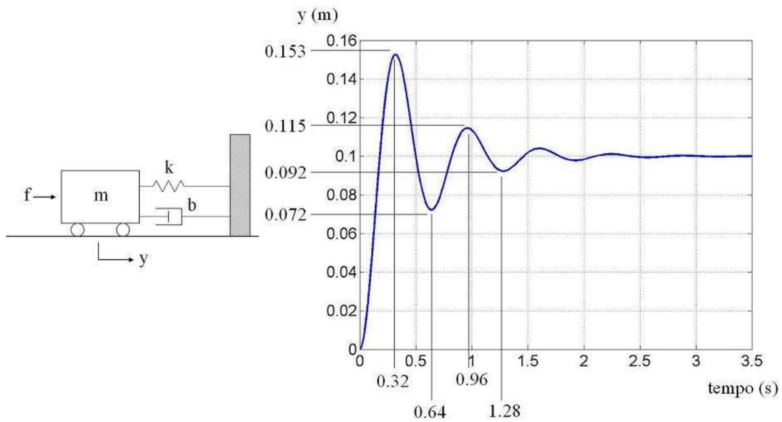

Figure 1: Sistema meccanico da studiare e sua risposta al gradino

B) Si consideri il sistema rappresentato in figura 2. Con M si indichi la massa del carrello, il cui valore nominale vale $M = 10\ kg$, con y la posizione del carrello, con f la forza impressa nella direzione di moto. Si assuma un movimento senza attrito. Sulla base dei parametri nominali, è stato progettato un controllore in retroazione in grado di stabilizzare il sistema agendo sulla forza f. Il controllore realizzato ha funzione di trasferimento nominale $C(s) = K\frac{\tau_1 s+1}{\tau_2 s+1}$, con $K = 100$, $\tau_1 = 0.25$ e $\tau_2 = 0.2$. Nel caso in cui i vari parametri in gioco siano incerti e possano variare all'interno degli intervalli $(8-\alpha) \leq m \leq (12+\alpha)$, $(80-\beta) \leq K \leq (120+\beta)$, $0.21 \leq \tau_1 \leq 0.29$, $0.17 \leq \tau_2 \leq 0.23$, il controllore $C(s)$ è ancora in grado di stabilizzare il sistema?

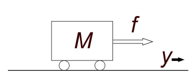

Figure 2: Carrello mobile senza attrito

C) Si consideri il sistema in retroazione rappresentato in fig. 3. In base alle caratteristiche del sistema dinamico da controllare, rappresentato dalla funzione di trasferimento $G(s)$, e alle specifiche richieste, è stato progettato un controllore con funzione di trasferimento $C(s) = K\frac{(s+1)^2}{s(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$, con $K = 2 + \alpha/100$, $\tau_1 = 0.1 + \gamma/100$ e $\tau_2 = 0.05$. Si supponga di dovere realizzare il controllore per mezzo di un programma al computer, in cui ogni calcolo sia svolto su tempi multipli del tempo di "clock" $T = 0.001$ s. Si disponga quindi di una porta di ingresso che legga la misura istantanea dell'errore $e(t)$ e di una porta di uscita che acquisisca il valore istantaneo calcolato del controllo $u(t)$, per renderlo disponibile all'impianto da controllare.

- Si scriva una equazione differenziale che descriva l'evoluzione di $u(t)$ in presenza della forzante $e(t)$, compatibile con la funzione di trasferimento del controllore $C(s)$.
- Utilizzando uno pseudo-linguaggio di programmazione, si scriva un programma che simuli il controllore C.

- **OPZIONALE** Si scriva il programma in Matlab e si simuli la risposta del controllore C al gradino unitario.

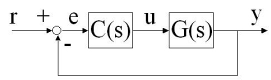

Figure 3: Sistema in retroazione da studiare

Soluzione

A) L'equazione differenziale che descrive il moto della massa è la seguente:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = f.$$

L-trasformando l'equazione del moto si ottiene la funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k} = \frac{1}{k}\frac{1}{\frac{m}{k}s^2 + \frac{b}{k}s + 1}.$$

Poiché il sistema è del secondo ordine, è conveniente riscrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ nella forma:

$$G(s) = \frac{1}{k}\frac{1}{\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\frac{\delta}{\omega_n}s + 1},$$

dove $\frac{1}{\omega_n^2} = \frac{m}{k}$ e $\frac{2\delta}{\omega_n} = \frac{b}{k}$.
La costante della molla k può essere calcolata immediatamente in base al valore che la risposta assume a regime. Infatti, per il teorema del valore finale, se il sistema viene eccitato con una forza a gradino di ampiezza 100 N deve valere la relazione:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} sG(s)\frac{100}{s} = 100G(0) = \frac{100}{k}.$$

Come si osserva in figura, a regime la quota y del sistema vale 0.1 m; la costante elastica della molla è quindi $k = 1000$ N/m.
I valori della massa m e del coefficiente di attrito viscoso b possono essere ottenuti facilmente ricordando le proprietà della risposta al gradino dei sistemi del secondo ordine. Dall'esame della risposta del sistema si ottiene che la massima sovraelongazione vale:

$$S = \frac{0.153 - 0.1}{0.1} = 0.53.$$

Ricordando che, per un sistema del secondo ordine, il legame tra la massima sovraelongazione S e lo smorzamento dei poli δ è $S = e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$, si ricava immediatamente il valore dello smorzamento:

$$\delta = \sqrt{\frac{\ln^2(S)}{\pi^2 + \ln^2(S)}} = 0.2.$$

Inoltre, per un sistema del secondo ordine il tempo in corrispondenza del quale si ha la massima sovraelongazione è dato da:

$$T_m = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}.$$

Dall'esame della risposta al gradino si ricava $T_m = 0.32$ s; in base a questo valore si può ricavare la pulsazione naturale ω_n del sistema:

$$\omega_n = \frac{\pi}{T_m\sqrt{1-\delta^2}} = 10.$$

Una volta trovata la pulsazione naturale ω_n, è immediato ricavare i valori della massa m e del coefficiente di attrito viscoso:

$$\begin{aligned} m &= \tfrac{k}{\omega_n^2} = 10 \text{ kg}, \\ b &= \tfrac{2k\delta}{\omega_n} = 40 \text{ Ns/m}. \end{aligned}$$

B) La equazione dinamica del sistema è la seguente:

$$M\ddot{y} = f$$

La funzione di trasferimento che lega l'ingresso f e l'uscita y vale:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2}.$$

Utilizzando una retroazione negativa con controllore $C(s) = K\frac{\tau_1 s+1}{\tau_2 s+1}$, si ottiene la seguente funzione di trasferimento di anello chiuso:

$$G_c(s) = \frac{K(\tau_1 s + 1)}{M\tau_2 s^3 + Ms^2 + K\tau_1 s + K}.$$

Se tutti i parametri in gioco assumono i rispettivi valori nominali, il controllore $C(s)$ è in grado di stabilizzare il sistema e i poli della funzione di trasferimento in anello chiuso sono in $s = -4.6319$ e in $s = -0.1841 \pm j3.2804$. Il luogo delle radici della funzione di trasferimento $C(s)G(s)$ in condizioni nominali è riportato in figura 4.

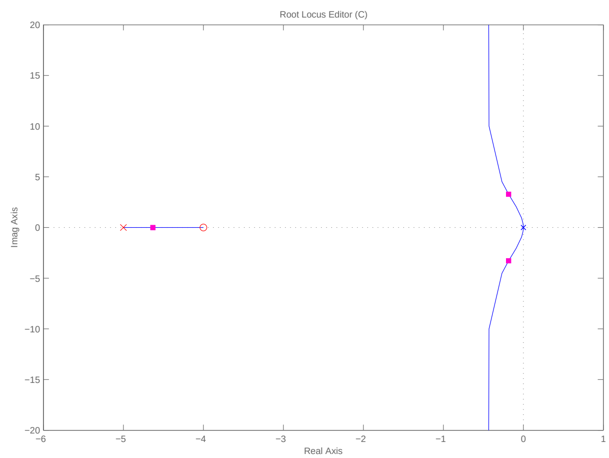

Figure 4: Luogo delle radici per il sistema $C(s)G(s)$ in condizioni nominali

Per verificare se il controllore $C(s)$, progettato in condizioni nominali, è ancora in grado di stabilizzare il sistema per ciascuno dei valori che i parametri incerti possono assumere, è possibile utilizzare il criterio di Kharitonov, applicato al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento di anello chiuso $G_c(s)$. Il polinomio da studiare è il seguente:

$$\phi(s) = M\tau_2 s^3 + Ms^2 + K\tau_1 s + K.$$

Per prima cosa, si indichino i quattro coefficienti del polinomio con i simboli $\phi_0 = M\tau_2$, $\phi_1 = M$, $\phi_2 = K\tau_1$, $\phi_3 = K$, e si descriva sinteticamente il polinomio in esame nella forma $\phi(s) : \{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$. Ciascun coefficiente ϕ_i del denominatore di $G_c(s)$ varia in un intervallo di valori ben definito $\phi_i^- \leq \phi_i \leq \phi_i^+$; nel caso $\alpha = \beta = 0$, gli intervalli di variazione dei quattro coefficienti sono:

$$\begin{array}{rcl} 1.36 & \leq \phi_0 \leq & 2.76 \\ 8 & \leq \phi_1 \leq & 12 \\ 16.8 & \leq \phi_2 \leq & 34.8 \\ 80 & \leq \phi_3 \leq & 120 \end{array}$$

Si definiscono a questo punto quattro polinomi ausiliari:

$$\begin{array}{rclcl} \phi_a(s) & = & \{\phi_0^+, \phi_1^+, \phi_2^-, \phi_3^-\} & = & 2.76s^3 + 12s^2 + 16.8s + 80 \\ \phi_b(s) & = & \{\phi_0^-, \phi_1^-, \phi_2^+, \phi_3^+\} & = & 1.36s^3 + 8s^2 + 34.8s + 120 \\ \phi_c(s) & = & \{\phi_0^+, \phi_1^-, \phi_2^-, \phi_3^+\} & = & 2.76s^3 + 8s^2 + 16.8s + 120 \\ \phi_d(s) & = & \{\phi_0^-, \phi_1^+, \phi_2^+, \phi_3^-\} & = & 1.36s^3 + 12s^2 + 34.8s + 80 \end{array}$$

Le radici dei quattro polinomi non hanno tutte parte reale negativa, come è possibile vedere trovandone numericamente i valori in Matlab. Infatti, i polinomi $\phi_a(s)$ e $\phi_c(s)$ hanno una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva. Il sistema in anello chiuso non è quindi asintoticamente stabile per tutti i valori che i parametri incerti possono assumere.
Si noti che, in generale, il criterio di Kharitonov si riferisce al caso in cui i coefficienti ϕ_i possano variare gli uni indipendentemente dagli altri. Questo non è certamente il caso dei coefficienti del polinomio da studiare, in quanto la massa M e il guadagno del controllore K compaiono in più di un coefficiente. Ad esempio, si nota che il polinomio $\phi_c(s)$ non ha coefficienti ammissibili: infatti, non è possibile che il coefficiente ϕ_1 sia minimo e che, contemporaneamente, il coefficiente ϕ_0 sia massimo. Anche il polinomio $\phi_d(s)$ non ha coefficienti ammissibili. In casi come questo, il criterio di Kharitonov può fornire condizioni troppo cautelative.
Uno studio più accurato della robusta stabilità in casi, come nel presente, in cui le perturbazioni abbiano una particolare struttura, può essere fatto mediante il criterio di Routh. Si deve considerare però che, in generale, la risoluzione del sistema di disequazioni non lineari risultante dalla applicazione del criterio di Routh è molto più complessa dell'applicazione del criterio di Kharitonov.
Si discuta quindi la stabilità del sistema chiuso in retroazione utilizzando il criterio di Routh. La tabella di Routh è la seguente:

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & M\tau_2 & K\tau_1 \\
s^2 & M & K \\
s^1 & K(\tau_1 - \tau_2) & 0 \\
s^0 & K & 0
\end{array}
$$

Affinché le radici del polinomio $\phi(s)$ siano tutte a parte reale negativa devono essere verificate le relazioni:

$$M\tau_2 > 0, \quad M > 0 \quad K(\tau_1 - \tau_2) > 0 \quad K > 0.$$

Come si vede, in questo caso specifico l'utilizzo della tabella di Routh risulta particolarmente semplice ed immediato. Poiché tutti i parametri incerti sono positivi, l'unica condizione da verificare al variare dei parametri all'interno dei rispettivi intervalli di incertezza è che risulti:

$$\tau_1 > \tau_2$$

La condizione di stabilità non coinvolge quindi né le variazioni del valore della massa M del carrello, né le variazioni del guadagno K del controllore.
Se i parametri in gioco possono variare all'interno degli intervalli specificati, esiste quindi la possibilità che il sistema in retroazione sia instabile. Ad esempio, se τ_1 assume il valore minimo consentito, pari a 0.21, e τ_2 assume il valore massimo di 0.23, il luogo delle radici di $C(s)G(s)$ è riportato in fig. 5.

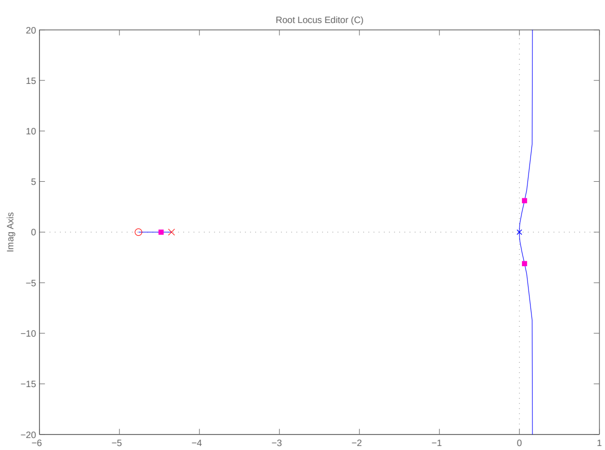

Figure 5: Luogo delle radici instabile per il sistema $C(s)G(s)$ in condizioni perturbate

C) Il controllore ha in ingresso l'errore $e(t)$ e in uscita il controllo $u(t)$. Per prima cosa, è necessario ricavare l'equazione differenziale del controllore. Si ottiene:

$$\left[\tau_1\tau_2 s^3 + (\tau_1+\tau_2)s^2 + s\right] U(s) = \left(Ks^2 + 2Ks + K\right) E(s),$$

da cui, per anti-trasformazione e supponendo nulle le condizioni iniziali, si ricava l'equazione in forma normale:

$$\frac{d^3u}{dt^3} + \frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{\tau_1\tau_2}\frac{du}{dt} = \frac{K}{\tau_1\tau_2}\frac{d^2e}{dt^2} + \frac{2K}{\tau_1\tau_2}\frac{de}{dt} + \frac{K}{\tau_1\tau_2}e.$$

A questo punto, è immediato ottenere la rappresentazione del controllore $C(s)$ in forma canonica di controllo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}e(t), \\ u(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}e(t), \end{aligned}$$

dove:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{\tau_1\tau_2} & -\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{K}{\tau_1\tau_2} & \frac{2K}{\tau_1\tau_2} & \frac{K}{\tau_1\tau_2} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D} = 0$$

Discretizzando la variabile tempo e indicando con i il generico istante di calcolo, è possibile approssimare la derivata prima del vettore di stato $\mathbf{x}$ con una differenza finita:

$$\dot{\mathbf{x}}(i) \simeq \frac{\mathbf{x}(i+1) - \mathbf{x}(i)}{T}.$$

La realizzazione in tempo discreto del controllore C è quindi la seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(i+1) &= \mathbf{A_d}\mathbf{x}(i) + \mathbf{B_d}e(i), \\ u(i) &= \mathbf{C_d}\mathbf{x}(i), \end{aligned}$$

dove:

$$\mathbf{A_d} = [T\mathbf{A} + \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & -\frac{T}{\tau_1\tau_2} & \left(1 - T\frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1\tau_2}\right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B_d} = T\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C_d} = \mathbf{C}.$$

Il segmento di un programma per l'implementazione su computer del controllore risulterebbe scritto, in uno pseudo-linguaggio di programmazione:

```
...
constant K, tau1, tau2, T, T_max;
constant x1_0=0;
constant x2_0=0;
constant x3_0=0;
...
x1=x1_0;
x2=x2_0;
x3=x3_0;
for i=0:T_max/T
  u=K/(tau1*tau2)*(x1+2*x2+x3);
```

```
write(u,output);
e=read(input);
x1_buffer=x1;
x2_buffer=x2;
x3_buffer=x3;
x1=x1_buffer+T*x2_buffer;
x2=x2_buffer+T*x3_buffer;
x3=-T/(tau1*tau2)*x2_buffer+(1-T*(tau1+tau2)/(tau1*tau2))*x3_buffer+T*e;
end
```

Infine, per simulare in Matlab la risposta del controllore al gradino unitario, può essere utilizzato il programma seguente ($\alpha = \beta = \gamma = 0$):

```
k=2;
tau1=0.1;
tau2=0.05;

A=[0 1 0;0 0 1;0 -1/(tau1*tau2) -(tau1+tau2)/(tau1*tau2)];
B=[0;0;1];
C=[k/(tau1*tau2) 2*k/(tau1*tau2) k/(tau1*tau2)];
D=0;

T=1/1000;

Ad=T*A+eye(3);
Bd=T*B;
Cd=C;
Dd=D;

tempo=0:T:5;
tempo=tempo';

errore=1*ones(size(tempo));

output=[];

x_0=[0;0;0];

x=x_0;

for i=0:5/T
   output=[output;Cd*x];
   e=errore(i+1);
   x_buffer=x;
   x=Ad*x_buffer+Bd*e;
end
```

Si noti che nel programma Matlab è stata utilizzata la notazione matriciale: infatti Matlab permette di usare un linguaggio di programmazione di alto livello ed è in grado di svolgere il prodotto tra matrici e tra matrici e vettori.
La risposta al gradino del controllore, ottenuta per mezzo del programma appena scritto, è riportata in fig. 6.

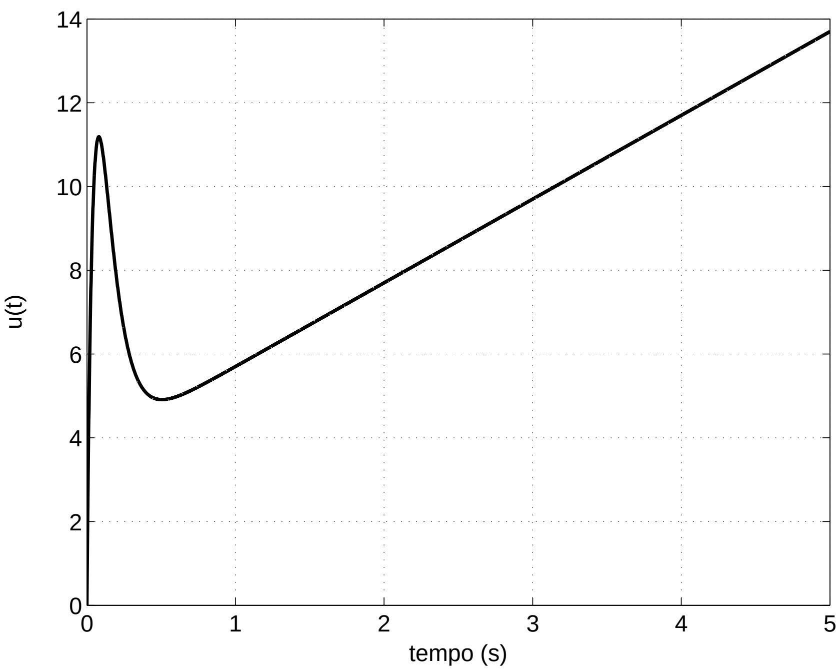

Figure 6: Simulazione della risposta al gradino unitario del controllore C