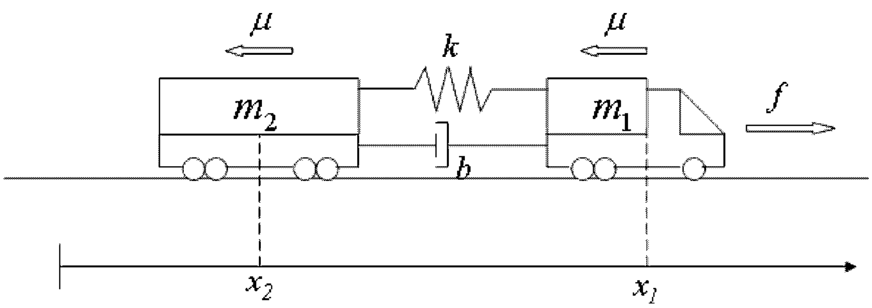
Scritto di Regolazione e controllo dei sistemi meccanici — 5 Settembre 2003

Numero di matricola						
	–	–	$= 10\alpha - 1$	$= 10\beta - 1$	$= 10\gamma - 1$	–

(VO) Si consideri il sistema non lineare formato da una motrice e un rimorchio come riportato in figura



dove $m_1 = (2000 + \frac{\gamma}{5})kg$ ed $m_2 = (3000 + \frac{\gamma}{5})kg$ sono rispettivamente la massa della motrice e del rimorchio, $K = (5000+\alpha)\ N/m$ è la costante elastica, $b = (200+\beta) Nsec/m$ il coefficiente di smorzamento viscoso della trasmissione, $\mu = (15 + \beta)Nsec^2/m^2$ il coefficiente di attrito viscoso dell'aria e f la forza motrice. Le equazioni dinamiche del sistema sono

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 &= f - k(x_1 - x_2) - b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \mu\dot{x}_1^2 \\ m_2\ddot{x}_2 &= k(x_1 - x_2) + b(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \mu\dot{x}_2^2 \end{cases}$$

A Trovare l'ingresso che all'equilibrio mantenga la motrice e il rimorchio a velocità costante pari a $V = 70km/h$. Linearizzare il sistema lungo la traiettoria corrispondente.

B Supponendo di disporre della lettura tachimetrica della velocità della motrice, rappresentata da $\dot{x}_1$, e potendo controllare la forza motrice f, discutere le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità del sistema linearizzato dandone una interpretazione fisica.

C Calcolare la funzione di trasferimento e tracciarne i diagrammi asintotici di Bode adeguatemente commentati. Si calcoli la funzione di trasferimento nel caso in cui l'uscita sia la misura della posizione della motrice e se ne commentino le differenze con quella precedentemente calcolata.

D Si sintetizzi un regolatore che, usando la misura del valore di uscita $\dot{x}_1$, regoli la forza motrice f in modo da garantire l'asintotica stabilità della traiettoria di equilibrio e l'ulteriore specifica che il sistema regolato insegua riferimenti costanti di velocità con errore a regime nullo.

E Si consideri il sistema non lineare dato dalle equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 + x_2^2 \sin x_3 + x_3 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2^2 x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -x_2^3 - x_1 \end{cases}$$

Si determini un ingresso u che renda l'origine un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Soluzione

A Scelte le variabili di stato $(w_1, w_2, w_3, w_4) = (x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2)$, la dinamica non lineare del sistema motrice/rimorchio può essere espressa nella seguente forma di stato:

$$\begin{cases} \dot{w}_1 &= w_2 \\ \dot{w}_2 &= \frac{f}{m_1} - \frac{k}{m_1}(w_1 - w_3) - \frac{b}{m_1}(w_2 - w_4) - \frac{\mu}{m_1} w_2^2 \\ \dot{w}_3 &= w_4 \\ \dot{w}_4 &= \frac{k}{m_2}(w_1 - w_3) + \frac{b}{m_2}(w_2 - w_4) - \frac{\mu}{m_2} w_4^2 \end{cases}$$

Al fine di trovare il moto nominale di riferimento con velocità del rimorchio e della motrice assegnati e pari a $V = 70km/h = 19.45m/s$, si deve porre $\dot{\bar{w}}_1 = \bar{w}_2 = V \rightarrow \bar{w}_1 = w_{10} + Vt[m]$ e $\dot{\bar{w}}_3 = \bar{w}_4 = V \rightarrow \bar{w}_3 = w_{30} + Vt[m]$. Il punto di equilibrio sarà quindi: $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3, \bar{w}_4) = (w_{10} + Vt, V, w_{30} + Vt, V)$. Per ottenere l'ingresso nominale basta sostituire il moto nominale nella dinamica di $\dot{w}_2$ e $\dot{w}_3$:

$$\begin{cases} 0 &= f - k(w_{10} - w_{30}) - \mu V^2 \\ 0 &= k(w_{10} - w_{30}) - \mu V^2 \end{cases}$$

ottenendo $\bar{f} = 2\mu V^2$.

Il modello nonlineare, riscritto nelle nuove variabili $z = w - \bar{w}$ e $u = f - \bar{f}$, vale

$$\begin{cases} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= \frac{u}{m_1} - \frac{k}{m_1}(z_1 - z_3) - \frac{b}{m_1}(z_2 - z_4) - \frac{\mu}{m_1}(z_2^2 + 2Vz_2) \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= \frac{k}{m_2}(z_1 - z_3) + \frac{b}{m_2}(z_2 - z_4) - \frac{\mu}{m_2}(z_4^2 + 2Vz_4) \end{cases} \tag{1}$$

Calcolando il modello linearizzato attorno al moto nominale si ha

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{2\mu(V+z_2)+b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & -\frac{2\mu(V+z_4)+b}{m_2} \end{bmatrix}_{\bar{z},\bar{u}} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

da cui nel caso particolare $\alpha = \beta = \gamma = 0$, si hanno le matrici:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{2\mu V+b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & -\frac{2\mu V+b}{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.5 & -0.39 & 2.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1.67 & 0.07 & -1.67 & 0.26 \end{bmatrix}; \ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5\ 10^{-4} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

B La matrice di raggiungibilità del sistema in forma di stato calcolato al punto (**A**) è:

$$R = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & -0.2 & -1.2 \\ 0.5 & -0.2 & -1.2 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0.8 & -0.3 \end{bmatrix},$$

la quale ha rango pieno pertanto il sistema è completamente raggiungibile. Utilizzando Matlab, questo risultato sulla raggiungibilità si può ottenere con i comandi `R=ctrb(A,B)` e `rank(R)`. Interpretando fisicamente il risultato sulla raggiungibilità si comprende che variando in modo opportuno la forza di trazione della motrice è possibile far raggiungere al rimorchio ed alla motrice stessa posizioni e velocità arbitrarie. Si osservi peraltro che il poter raggiungere in un qualsiasi tempo t un valore assegnato dello stato z, non implica che sia possibile seguire una particolare traiettoria $z(t)$ dello stato nel tempo.

Una volta scelta come misura la velocità della motrice (misurabile con il tachimetro posto sul veicolo stesso), cioè dopo avere imposto $C = [0\,1\,0\,0]$ e $D = 0$, la matrice di osservabilità sarà:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.5 & -0.39 & 2.5 & 0.1 \\ 1.142 & -2.3409 & -1.142 & 2.487 \\ 10.0055 & 2.2290 & -10.0055 & -0.7295 \end{bmatrix},$$

con rango pari a 3; in Matlab questo si ottiene con i comandi `O=obsv(A,C)` e `rank(O)`. Il sistema non è quindi completalmente osservabile. Calcolando il nucleo di O (`null(O)` in Matlab):

$$KerO = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0 \\ 0.7071 \\ 0 \end{bmatrix},$$

si ottiene che il sottospazio non osservabile è generato dal vettore $[1, 0, 1, 0]^T$. Ciò implica che misurando la velocità della motrice (lo stesso vale se si misura la velocità del rimorchio) non è osservabile la posizione del sistema complessivo motrice-rimorchio. Questo era lecito aspettarselo una volta che è stato richiesto di inseguire una traiettoria di riferimento e non di stabilizzare il sistema complessivo su un punto. Resta da notare che solo la somma delle distanze $x_1 + x_2$ non può essere determinata, mentre la loro differenza è osservabile, fatto determinante per il calcolo della forza elastica che motrice e rimorchio si scambiano.

C Dalle matrici (A, B, C, D), applicando la formula $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ la funzione di trasferimento del sistema risulta

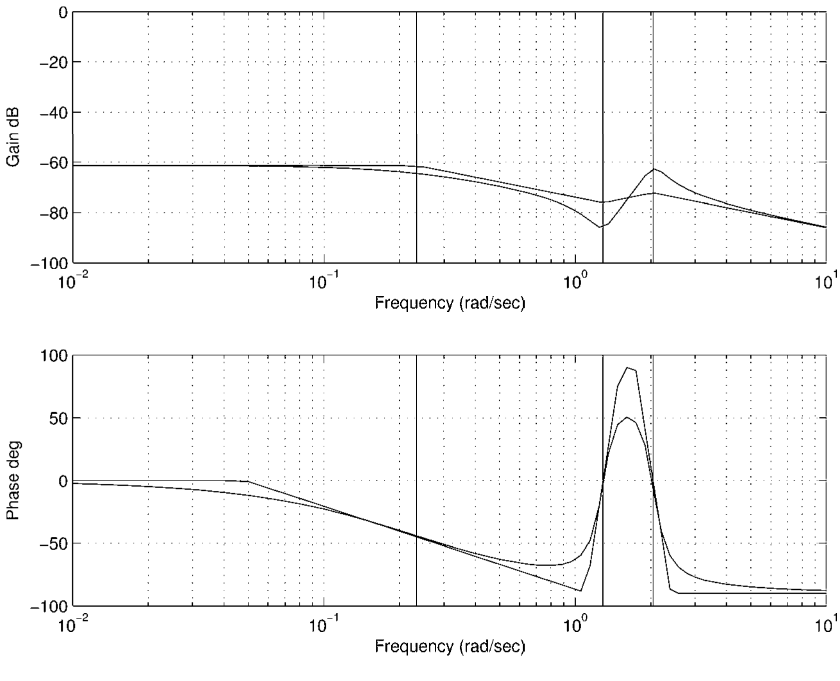
$$G(s) = \frac{m_2 s^2 + (b + 2\mu v)s + k}{m_1 m_2 s^3 + (2m_2\mu v + 2\mu v m_1 + b m_2 + b m_1)s^2 + (4b\mu v + m_1 k + k m_2 + 4\mu^2 v^2)s + 4k\mu v}$$

Sostituendo i valori numerici con $\alpha = \beta = \gamma = 0$ si ha:

$$G(s) = \frac{3}{250}\frac{180s^2 + 47s + 300}{4320s^3 + 2820s^2 + 18413s + 4200}$$

Tale funzione di trasferimento si ottiene in Matlab con il comando `G=tf(SS(A,B,C,D))`.

I relativi diagrammi di Bode sono riportati in figura:



Il sistema ha una coppia di zeri complessi coniugati approssimativamente in $-0.13 \pm j1.28$ e tre poli di cui uno reale in -0.233 e due complessi coniugati in $-0.209 \pm I2.03$, la costante di guadagno vale circa $8.5\,10^{-4}$. Il diagramma delle ampiezze parte quindi da un valore pari a -61.34. A pulsazione pari a 0.233 (corrispondente al polo semplice) il diagramma delle ampiezze comincia a scendere con pendenza di $20db/dec$, dopo pulsazione pari a 1.28 (corrispondente agli zeri complessi coniugati) sale con pendenza $20db/dec$. Infine da pulsazione 2.04 scende con pendenza $20db/dec$ (corrispondente ai poli complessi coniugati).

Per quanto riguarda il diagramma di fase parte da 0 e in corrispondenza del polo reale scende per un totale di $\frac{\pi}{2}$, alla pulsazione corrispondente agli zeri complessi coniugati sale di π mentre alla pulsazione corrispondente ai poli complessi coniugati scende di π riportandosi quindi per elevate pulsazioni a $-\frac{\pi}{2}$.

Se come uscita si prende la posizione della motrice x_1, il vettore delle uscite risulta $C_1 = [1\,0\,0\,0]$ e la nuova funzione di trasferimento è:

$$G_1(s) = \frac{m_2 s^2 + (b + 2\mu v)s + k}{s(m_1 m_2 s^3 + (2m_1\mu v + bm_2 + bm_1 + 2m_2\mu v)s^2 + (4b\mu v + m_1 k + km_2 + 4\mu^2 v^2)s + 4\mu vk)}$$

Sostituendo i valori numerici con $\alpha = \beta = \gamma = 0$ si ha:

$$G_1(s) = \frac{3}{250}\frac{180s^2 + 47s + 300}{s(4320s^3 + 2820s^2 + 18413s + 4200)}$$

In questo caso il denominatore della funzione di trasferimento ha grado pari a 4, per cui non vi sono cancellazioni polo-zero ed il sistema risulta essere completamente raggiungibile e completamente osservabile.

D Il sistema non è completamente osservabile, quindi lo studio delle sue proprietà dinamiche sarà fatto, sia che si proceda nel dominio della frequenza che nel caso in cui si proceda con un approccio geometrico implementando un regolatore, sul sottosistema 3×3 raggiungibile ed osservabile. In questo caso verranno adottate le più sistematiche tecniche di allocazione mediante stima degli stati e successiva retroazione degli stati stimati.

Per prima cosa assicuriamo che il sistema controllato in retroazione sia tale da reiettare i disturbi costanti. A tal fine inseriamo un polo nell'origine in serie all'impianto con il comando `sys0 = series(sys, tf(1,[1 0]) )`. Quindi il nuovo sistema da controllare avrà ordine quattro e forma di stato ottenuta mediante il comando Matlab `[Ao, Bo, Co, Do] = ssdata(sys0)`.

Passiamo ora ad allocare i poli del sistema in anello chiuso (che ora risultano in numero pari a 4) mediante retroazione dello stato, ad esempio, in -1. Si definisca a tale scopo `p=[-1 -1 -1 -1]`. La retroazione K che sposta gli autovalori in -1 si ottiene tramite il comando Matlab `K=acker(A,B,p)` che fornisce la retroazione $K = 10^3[1.2000\; 0.7499\; 6.6944\; -3.3366]$.

Non potendo disporre di tutto lo stato, è poi necessario progettare uno stimatore, al quale si assegnerà una dinamica piuttosto veloce per non degradare le performance del sistema di controllo. Come detto precedentemente è possibile progettare uno stimatore sul sottosistema ridotto nel caso in cui venga misurata la velocità $\dot{x}_1$ della motrice. In tal caso, supponiamo di voler porre i poli dello stimatore in -2, si definisce in questo caso `q=[-2 -2 -2 -2]`. Il valore corrispondente della matrice $\mathbf{L}$ di iniezione delle uscite sugli stati è calcolato mediante il comando `L=transpose(acker(A',C',q))` e risulta $L = [7.3472\; 1.4302\; 14.9416\; -6.1402]$

Il compensatore basato sul regolatore appena progettato si costruisce in due passi. Il primo passo consiste nell'utilizzare il comando `rsys=reg(sys,K,L)` che realizza il regolatore. Il secondo passo consiste infine nello spostare il polo nell'origine, precedentemente inserito nell'impianto, all'interno del controllore in modo tale da ottenere un controllore con un polo nell'origine che rende l'errore a regime della risposta al gradino pari a zero. In fig.1) è riportata la risposta al gradino del sistema senza polo nell'origine, mentre in fig.2) dopo l'aggiunta del polo. Si noti che nel primo caso il sistema insegue il gradino con un errore costante non nullo.

E Si consideri la candidata di Lyapunov $V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, la derivata direzionale risulta $\dot{V} = 2x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 \sin x_3 + 2x_1 x_3 - 2x_1^2 x_2 + 2x_2^3 x_3 + 2x_2 u - 2x_2^3 x_3 - 2x_1 x_3 = 2x_1 x_2^2 \sin x_3 + 2x_2 u$. Scegliendo $u = -x_1 x_2 \sin x_3 - x_2$ si ottiene $\dot{V} = -2x_2^2$ che risulta semidefinita negativa. Sia $N = \{(x_1, x_2, x_3)|\dot{V} = 0\} = \{(a, 0, b)|a, b \in \mathbb{R}\}$ si ha che una traiettoria che parte da un punto di N si evolve dentro N soltanto se $0 = \dot{x}_2 = -x_1^2 + x_2^2 x_3 + u = -x_1^2 + x_2^2 x_3 - x_1 x_2 \sin x_3 - x_2 = -a^2$, da cui segue necessariamente $a = 0$. Di conseguenza anche $0 = \dot{x}_1 = x_1 x_2 + x_2^2 \sin x_3 + x_3 = b$ e questo vale solo se $b = 0$. Dal teorema di Lasalle-Krasowskii si ottiene che l'equilibrio è asintoticamente stabile in quanto l'unica traiettoria del sistema contenuta in N è l'origine.

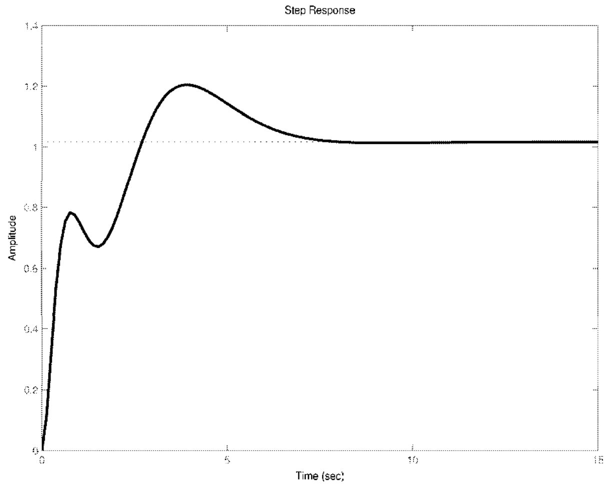


Figure 1: Risposta al gradino del sistema controllato senza polo nell'origine.

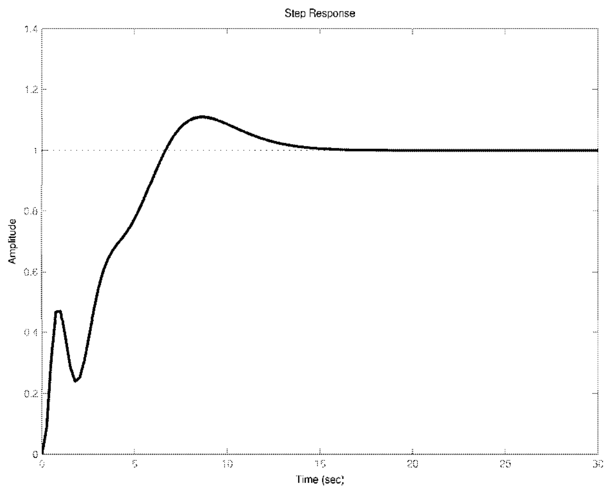


Figure 2: Risposta al gradino del sistema controllato con polo nell'origina.