Esame di Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici – 6– 2–2002

Nome e Cognome:						
Anno di frequenza:						
Numero di matricola						
	–	–	$= \alpha - 1$	$= \beta - 1$	$= \gamma - 1$	$= \delta - 1$

A (pt. 3) Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols relativi al sistema:

$$G(s) = \frac{10\alpha(100s+1)}{(\beta s+1)^2(0.0004s^2+0.01s+1)}$$

indicando i valori nei punti salienti del primo.

B (pt. 8) Per il sistema di cui al punto **A**, progettare un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino nullo;
- errore a regime alla rampa ≤ 1 %;
- margine di fase $\geq \pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra 210^4 e 410^4 rad/sec.

Dato il sistema tempo-continuo per il quale la relazione fra l'ingresso u e l'uscita y é espressa dalla seguente equazione differenziale:

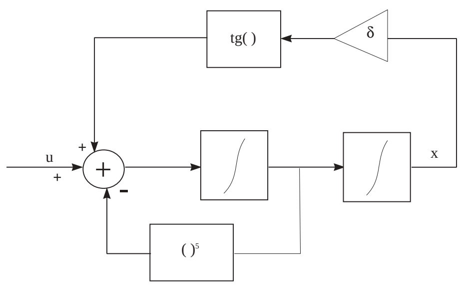
$$y^{IV} + 5y^{III} + 10y^{II} + 12y^{I} + 8y = u^{I} - \gamma u$$

C (pt. 4) Discutere la stabilitá del sistema; trovare i modi del sistema e descriverne graficamente l'evoluzione temporale.

E (pt. 3) Trovare la risposta del sistema all'ingresso $u(t) = 2\sin t + 3\cos(10t)$.

F (pt. 4) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici nel caso di retroazione unitaria sia negativa che positiva e per guadagni K variabili fra 0 e $+\infty$.

Con riferimento al sistema il cui schema é riportato in figura seguente:



F (pt. 2) Trovare l'equazione differenziale che descrive l'evoluzione temporale della variabile x.

G (pt. 2) Scrivere una realizzazione del sistema nello spazio degli stati.

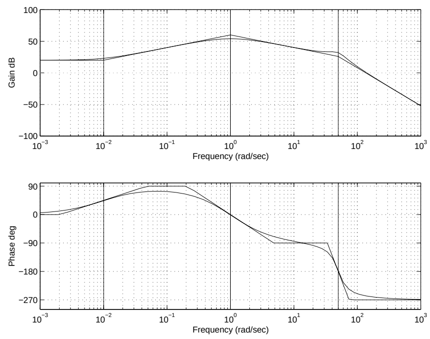
H (pt. 3) Trovare i punti di equilibrio con ingresso nullo, scrivere le matrici **A** e **B** del modello linearizzato attorno ad essi e studiare la stabilità dell'equilibrio in tali punti.

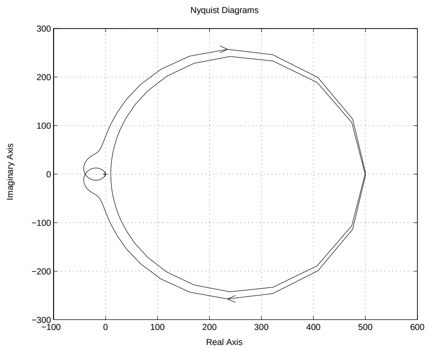
I (pt. 3) Trovare un ingresso u che renda l'origine unico punto di equlibrio globalmente asintoticamente stabile.

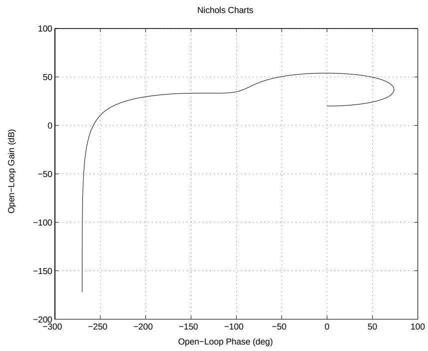
Soluzione

A) Il sistema è già descritto in forma di Bode. La costante di guadagno statico è 10α. Procedendo per pulsazioni crescenti, si trovano i contributi dello zero a pulsazione 0.01 rad/sec, del polo reale doppio a pulsazione $\frac{1}{\beta}$ rad/sec e della coppia di poli complessi coniugati con pulsazione naturale $\omega_n = 50$ rad/sec e coefficiente di smorzamento $\zeta = 0.25$. Il sistema è a fase minima, quindi il diagramma delle fasi potrebbe essere interamente dedotto a partire dalla conoscenza del diagramma delle ampiezze mediante la Formula di Bode. In corrispondenza della pulsazione del primo polo, il modulo della risposta armonica é pari a $20\ \mathsf{Log}\,(10\alpha) + 20(\ \mathsf{Log}\,\frac{1}{\beta} - \ \mathsf{Log}\,0.01) = 20\ \mathsf{Log}\,1000\alpha\beta$dB. In corrispondenza del secondo polo, il modulo della risposta armonica é pari a $20\ \mathsf{Log}\,1000\alpha\beta - 20(\ \mathsf{Log}\,50 - \ \mathsf{Log}\,\frac{1}{\beta}) = 20\ \mathsf{Log}\,\frac{20\alpha}{\beta^2}$. Dunque se $\frac{20\alpha}{\beta^2} < 1$, il valore della pulsazione di taglio é inferiore a 50rad/sec, mentre se $\frac{20\alpha}{\beta^2} < 1$, il valore della pulsazione di taglio si ottiene risolvendo $60(\ \mathsf{Log}\,\omega_T - \ \mathsf{Log}\,50) = 20\ \mathsf{Log}\,\frac{20\alpha}{\beta^2}$, cioè $\omega_T = 50\left(\frac{20\alpha}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ rad/sec.

I diagrammi di Nyquist e Nichols sono ottenuti da quello di Bode senza alcuna difficoltà. Le figure seguenti riportano esempi di diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols per $\alpha = \beta = 1$.

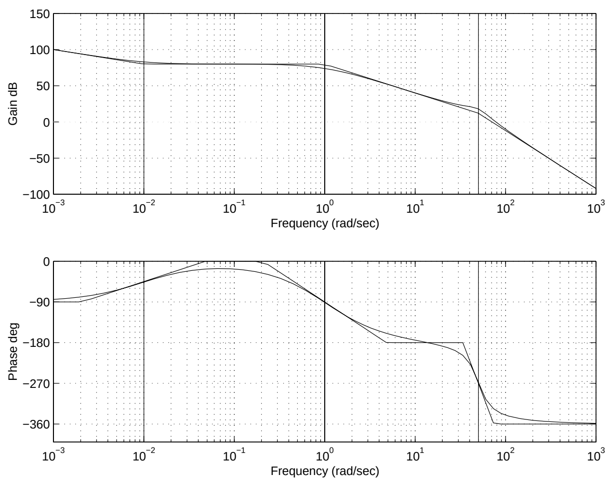






B) Poiché il sistema é a fase minima, si può procedere semplicemente con la sintesi sui diagrammi di Bode. Fissiamo un controllore $C(s) = \frac{K}{s^t}C_0(s)$, con $C_0(0) = 1$. Per soddisfare le specifiche statiche è necessario un polo nell'origine, quindi poniamo $t = 1$. La costante K viene determinata in base al requisito sull'errore a regime sulla rampa: tale errore è pari a $\frac{1}{K10\alpha}$, quindi occorre che sia $K \geq \frac{10}{\alpha}$.

Se scegliamo $K = \frac{10}{\alpha}$, il sistema (dopo la compensazione statica) ha un diagramma di Bode rappresentato nella figura seguente.



In corrispondenza della pulsazione relativa allo zero, il modulo della risposta armonica vale 80dB e rimane tale fino alla pulsazione del primo polo reale doppio, pari a $\frac{1}{\beta}$ rad/sec. Dopo di che, il diagramma asintotico di ampiezza comincia a scendere con una pendenza pari a -40 dB/dec. Se $\frac{1}{\beta} \leq 0.5$ (ossia $\beta \geq 2$, la pulsazione di taglio é pari a $\omega_T = \frac{100}{\beta}$. Nel caso $\beta = 1$, la pulsazione naturale dei due poli coniugati 50 rad/sec dista meno di 2 decadi dalla pulsazione del polo reale doppio, dunque il modulo della risposta armonica in corrispondenza di tale pulsazione é ancora magiiore di 1 e precisamente vale $80 - 40\ \mathsf{Log}\,50 \simeq 12$ dB. La pulsazione di taglio si ottiene dalla relazione $80(\ \mathsf{Log}\,\omega_T - \ \mathsf{Log}\,50) = 12$ ed é pari a $\omega_T \simeq 71$ rad/sec. In ogni caso, le specifiche relative alla banda passante non sono rispettate e non é soddisfatto nemmeno il requisito sul margine di fase, essendo l'asse a 0dB attraversato con pendenza pari a -40 dB/dec per $\beta \geq 2$ o addirittura -80 dB/dec per $\beta = 1$.

Una possibile soluzione consiste nel porre una coppia di zeri complessi coniugati a cancellare la coppia di poli complessi coniugati. Tuttavia questo non é sufficiente, poiché la pulsazione di taglio risulta pari a $\frac{100}{\beta}$ e non risulta comunque soddisfatto il requisito sul margine di fase. Dunque occorre un ulteriore zero in una posizione adeguata. La soluzione piú semplice di porlo alla pulsazione $\frac{1}{\beta}$ rad/sec, in modo da cancellare uno dei due poli reali coincidenti, non risolve il problema del tutto, perché la pulsazione di taglio risulterebbe cosí pari a $\frac{10000}{\beta}$. Occorre allora aumentare il guadagno in modo da spostare verso destra la pulsazione di taglio. Ad esempio, per fare in modo che la pulsazione di taglio sia pari a 20000 rad/sec, occorre che la moltiplicare per un ulteriore fattore 2β. Alternativamente, se non si vuole aumentare la costante moltiplicativa, si puó mettere lo zero in corrispondenza della pulsazione Z che soddisfa la relazione (sempre nell'ipotesi di collocare la pulsazione di taglio in 20000rad/sec) $80 - 40(\mathsf{Log}\, Z - Log\frac{1}{\beta}) = 20(\mathsf{Log}\, Z - \mathsf{Log}\, 20000)$. Si ottiene $Z = 1000(\frac{0.2}{\beta^2})^{\frac{1}{3}}$; Z risulta compreso tra 126 rad/sec, valore ottenuto per $\beta = 10$, e 585 rad/sec, valore ottenuto per $\beta = 1$.

Infine, per rendere causale il controllore, occorre inserire 2 poli, uno alla pulsazione di taglio, in modo che sia rispettato il requisito sul margine di fase, ed uno ad alta frequenza, ad esempio in -200000 rad/sec. Il controllore avrá dunque funzione di trasferimento pari a

$$C(s) = \frac{20\beta}{\alpha} \frac{(0.0004s^2 + 0.01s + 1)(\beta s + 1)}{s(0.00005s + 1)(0.000005s + 1)}$$

oppure

$$C(s) = \frac{10}{\alpha} \frac{(0.0004s^2 + 0.01s + 1)(\frac{s}{Z} + 1)}{s(0.00005s + 1)(0.000005s + 1)}$$

La funzione di trasferimento del sistema compensato é pari a:

$$G(s)C(s) = 200\beta \frac{(100s + 1)}{s(\beta s + 1)(0.00005s + 1)(0.000005s + 1)}$$

oppure

$$G(s)C(s) = 100 \frac{(100s + 1)(\frac{s}{Z} + 1)}{s(\beta s + 1)^2(0.00005s + 1)(0.000005s + 1)}$$

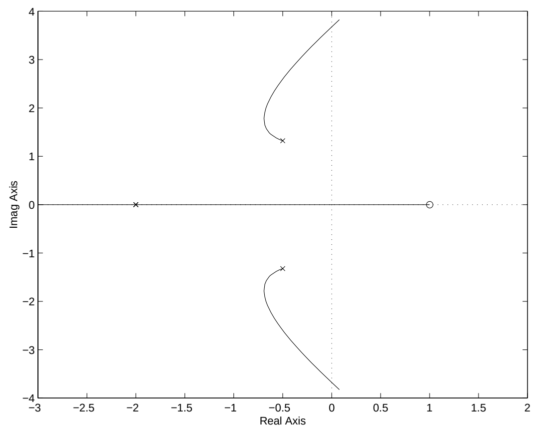
C) Occorre preliminarmente trovare la funzione di trasferimento del sistema. Tramite la trasformazione di Laplace e nell'ipotesi di condizioni iniziali nulle, si ottiene:

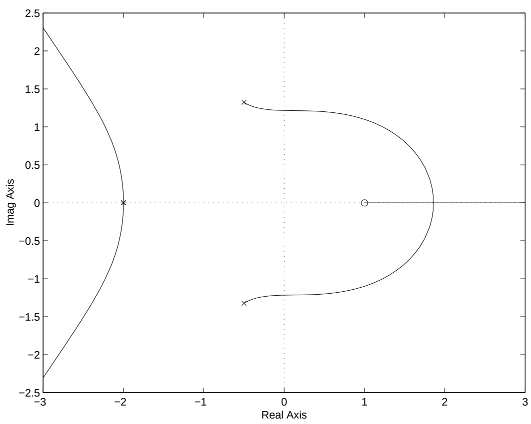
$$G(s) = \frac{s - \gamma}{s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 12s + 8} = \frac{s - \gamma}{(s + 2)^2(s^2 + s + 2)}$$

Il sistema presenta dunque un polo reale negativo doppio in -2 ed una coppia di poli complessi coniugati in $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2}$. Avendo tutti e quattro i poli parte reale negativa, il sistema risulta asintoticamente stabile. I modi del sistema corrispondenti al polo reale negativo doppio sono e^{-2t} e te^{-2t}. I modi corrispondenti ai poli complessi coniugati sono $e^{-\frac{t}{2}} \sin(\frac{\sqrt{7}}{2}t)$ e $e^{-\frac{t}{2}} \cos(\frac{\sqrt{7}}{2}t)$.

D) Posto $G(1) = M_1 e^{\phi_1}$ e $G(10) = M_2 e^{\phi_2}$, l'uscita del sistema in corrispondenza dell'ingresso specificato é data da $y(t) = 2M_1 \sin(t + \phi_1) + 3M_2 \cos(10t + \phi_2)$.

E) L'eccesso poli–zeri é pari a 3, per cui il luogo presenta 3 asintoti. Nel caso di retroazione negativa tali asintoti sono inclinati rispetto al semiasse reale positivo di angoli pari a $\frac{\pi}{3}$, π e $-\frac{\pi}{3}$ radianti rispettivamente; nel caso di retroazione positiva sono inclinati di angoli pari a 0, $\frac{2\pi}{3}$ e $-\frac{2\pi}{3}$. Gli asintoti si intersecano nel punto dell'asse reale di ascissa pari a $(-5 - \gamma)/3$. Nelle figure seguenti sono riportati i luoghi richiesti nel caso $\gamma = 1$.





F) Essendo $\ddot{x}$ la variabile a monte dei due integratori, costruendo l'equazione al sommatore iniziale si ottiene $\ddot{x} = -\dot{x}^5 + \tan(\delta x) + u$; quindi l'equazione differenziale richiesta é la seguente:

$$\ddot{x} + \dot{x}^5 - \tan(\delta x) = u$$

G) Ponendo $z_1 = x$ e $z_2 = \dot{x}$ si ottiene la rappresentazione nello spazio degli stati

$$\begin{aligned} \dot{z_1} &= z_2 \\ \dot{z_2} &= \tan(\delta z_1) - z_2^5 + u \end{aligned}$$

H) I punti di equilibrio sono rappresentati da tutte le coppie $z_1 = k\frac{\pi}{\delta}$, $z_2 = 0$ con k intero. Per studiare la stabilitá degli equilibri si puó utilizzare il metodo indiretto di Lyapunov. Le matrici del modello linearizzato sono:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \delta & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In tutti punti di equilibrio la matrice $\mathbf{A}$ ha autovalori $\sqrt{\delta}$ e $-\sqrt{\delta}$, quindi in tali punti l'equilibrio é instabile.

I) L'origine é fra i punti di equilibrio del sistema, ma non è il solo; l'ingresso richiesto puó essere scomposto nella somma di sue termini $u = u_1 + u_2$, il primo dei quali serve a rendere l'origine unico punto di equilibrio, mentre il secondo serve a rendere l'equilibrio globalmente asintoticamente stabile. Ponendo $u_1 = -\tan(\delta z_1) + z_2^5 + z_1$ si ottiene che l'origine diventa unico punto di equilibrio ed inoltre il sistema risulta lineare. Per rendere l'equilibrio asintoticamente stabile occorre allocarne i poli nel semipiano a parte reale negativa, e ció puó essere fatto tramite un secondo termine dell'ingresso nella forma $u_2 = az_1 + bz_2$, con le costanti a e b scelte in maniera opportuna.