**Esame di Regolazione e Controllo dei Sistemi Meccanici – 18-01-2001**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nome e Cognome: | | | | | | |
| Anno di frequenza: | | | | | | |
| Numero di matricola | | | | | | |
| | – | – | $=\alpha-1$ | $=\beta-1$ | $=\gamma-1$ | $=\delta-1$ |

Gli esercizi contrassegnati con "N" o con "V" si applicano rispettivamente ai candidati che si presentano col programma nuovo o vecchio.

- Data la f.d.t.:

$$G(s) = \frac{s+0.5}{s^2(s+\alpha)(s+\beta)}$$

**A (pt. 2)** Scrivere le matrici A, B, C, e D di una realizzazione minima nello spazio degli stati;

**B-N (pt. 3)** Trovare i modi del sistema e descriverne graficamente l'evoluzione temporale;

**C (pt. 2)** Discutere la stabilitá del sistema;

**D-N (pt. 2)** Discutere la raggiungibilitá e la osservabilitá del sistema. Se la realizzazione è raggiungibile, scriverne una che non lo sia; analogamente, se la realizzazione è osservabile, scriverne una che non lo sia.

- Dato il sistema

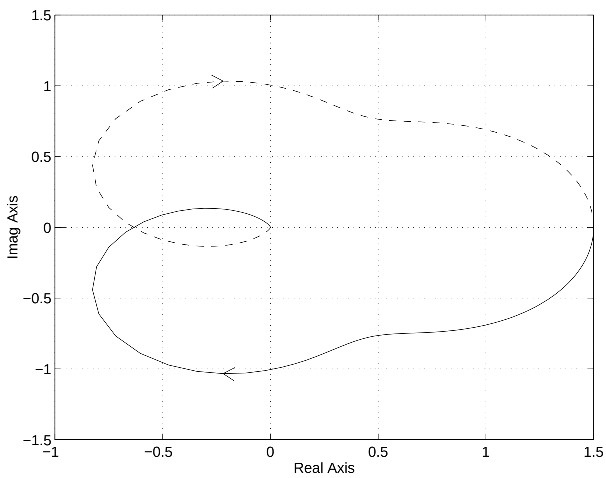
$$G(s) = \frac{K(s+0.9\gamma)}{(s+0.7\alpha)^2(s+\delta)^2}$$

**B-V (pt. 5)** Tracciare i diagrammi di Bode, Nyquist e Nichols per $K = 10$;

**E (pt. 5)** Disegnare qualitativamente i luoghi a modulo costante e pari a $M = \gamma db$, $M = -3db$, $M = -\gamma db$ sul diagramma di Nyquist e su quello di Nichols;

**F (pt. 4)** Per il sistema di cui sopra, tracciare qualitativamente il luogo delle radici nel caso di retroazione unitaria negativa e per guadagni $K$ variabili tra 0 e $+\infty$.

**G (pt. 4)** La f.d.t. $G(s) = \frac{s+1}{(s^2+s+4)(s^2+3s+1)}$ ha il diagramma di Nyquist riportato in figura. Analizzare se e con quali margini il sistema è stabile in anello chiuso.




**H (pt. 8)** Per il sistema $G(s) = \frac{\alpha}{\frac{1}{\gamma^2}s^2+\frac{2}{\gamma}s+1}$, si progetti un controllore che realizzi in prima approssimazione le seguenti specifiche:

- errore a regime al gradino minore dello 1%
- margine di fase di circa $\pi/4$;
- banda passante in anello chiuso compresa tra $50\gamma$ e $150\gamma$ (rad/sec).

**Soluzione**

**A)** Il polinomio dei poli e' $s^4+(\alpha+\beta)s^3+\alpha\beta s^2$. Non essendovi cancellazioni polo-zero, la dimensione di una realizzazione minima è pari all'ordine del polinomio, cioè 4. Scrivendo l'equazione differenziale corrispondente alla f.d.t. (cioè antitrasformando la relazione $y(s) = G(s)u(s)$ nell'ipotesi che le condizioni iniziali siano nulle), si ha

$$\begin{aligned} y^{(4)} + (\alpha+\beta)y^{(3)} + \alpha\beta\ddot{y} &= v \\ v &= \dot{u} + 0.5u \end{aligned}$$

quindi, ponendo $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$, $x_3 = \ddot{y}$, $x_4 = y^{(3)}$ si ottiene

$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\alpha\beta & -\alpha+\beta \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

**B-N)** Nella evoluzione libera dello stato sono presenti un modo costante $h(t)$, uno linearmente divergente $t$, e due modi esponenzialmente convergenti di tipo $e^{-\alpha t}$, $e^{-\beta t}$.

**C)** Il sistema è ovviamente instabile, vista la presenza di un polo doppio nell'origine e quindi di un modo divergente.

**D-N)** Il sistema scritto in forma minima è per definizione sia osservabile che raggiungibile. Un'altra realizzazione che non sia completamente raggiungibile né completamente osservabile deve avere almeno uno stato in più, che può essere scelto ad esempio in modo semplice facendo in modo che la sua dinamica non venga influenzata dagli ingressi, né alteri le uscite, né infine interagisca con quella degli altri stati. Quindi, se accanto al sistema in forma minima sopra descritto pongo un altro sistema

$$\dot{x}_5 = ax_5$$

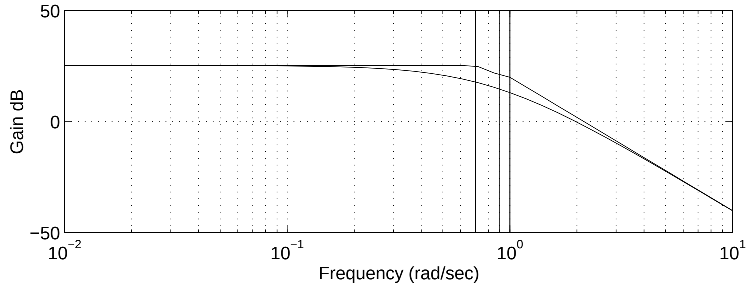
con $a$ qualsiasi, e aggiungo questa equazione a quelle sopra scritte, ottengo

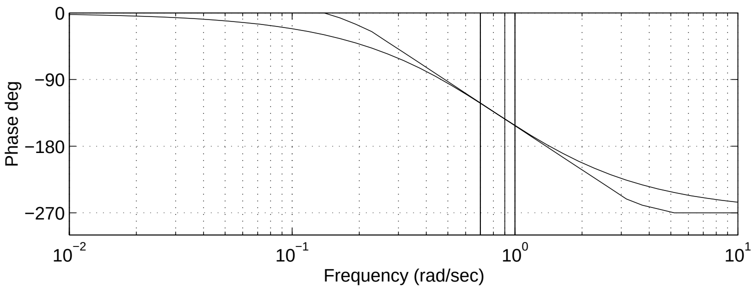
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \hline \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha\beta & -\alpha+\beta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} u$$

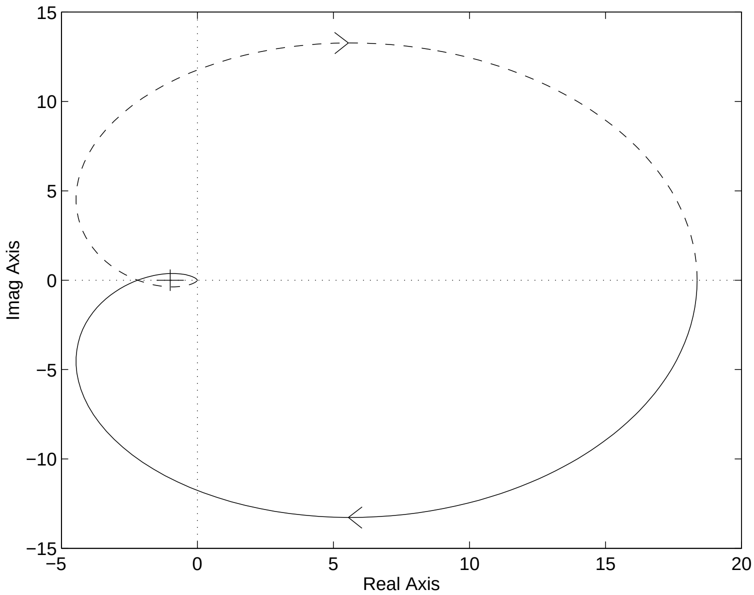
$$y = \left[\begin{array}{cccc|c} 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hline x_5 \end{bmatrix}$$

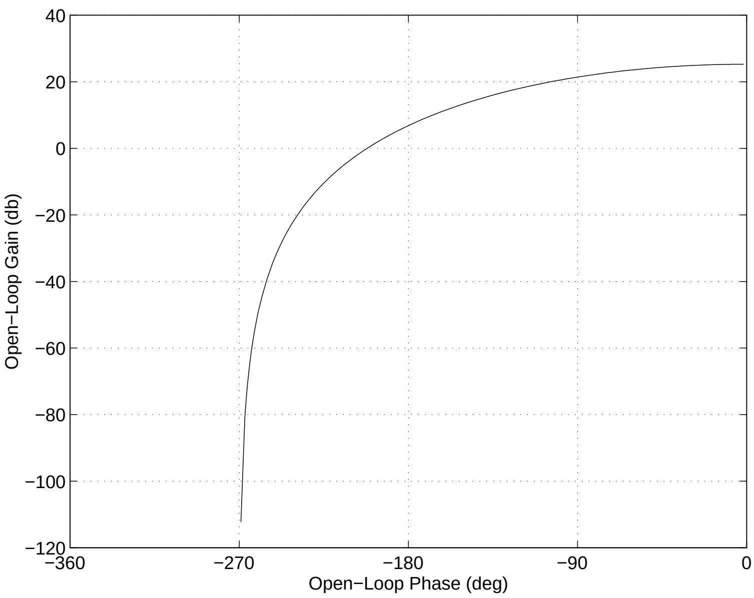
cioè un sistema che offre la stessa relazione ingresso-uscita, ma con uno stato sovrabbondante.

**B-V** Il sistema ha uno zero e quattro poli tutti a parte reale negativa. I diagrammi sotto riportati sono per $\alpha = \beta = \gamma = 1$


50
0
−50
Gain dB
$10^{-2}$
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
Frequency (rad/sec)

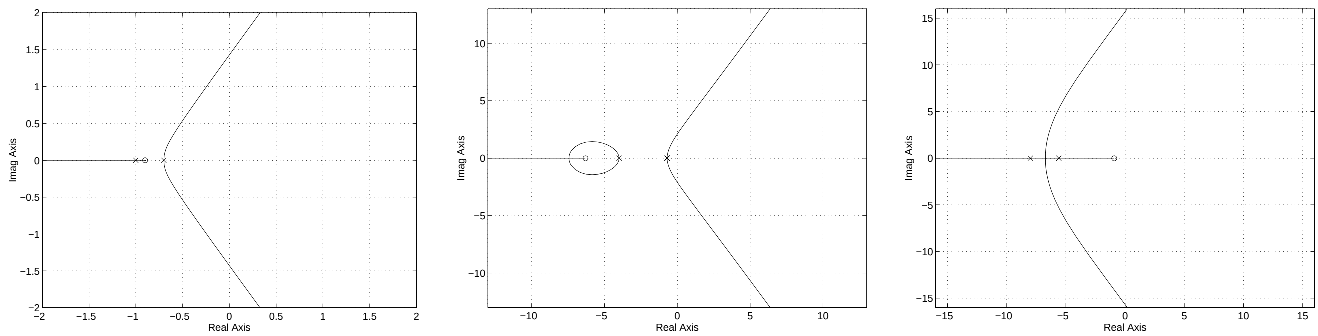

0
−90
−180
−270
Phase deg
$10^{-2}$
$10^{-1}$
$10^{0}$
$10^{1}$
Frequency (rad/sec)


15
10
5
0
−5
−10
−15
Imag Axis
−5
0
5
10
15
20
Real Axis


40
20
0
−20
−40
−60
−80
−100
−120
Open−Loop Gain (db)
−360
−270
−180
−90
0
Open−Loop Phase (deg)

**E** I luoghi a modulo costante pari a $M$ (consistente in quei valori della variabile complessa $G(\jmath\omega)$ per i quali $\frac{|G(\jmath\omega)|}{|1+G(\jmath\omega)|} = M$) nel diagramma di Nyquist sono cerchi centrati sul semiasse reale a destra dell'origine (se $M < 0$ in $db$) o a sinistra del punto $-1$ (se $M > 0$ in $db$). Per $M = -3db$, il cerchio passa dai punti $\pm\jmath 1$. Il cerchio a $M = -\gamma db$ è interno a questo se $-\gamma < -3$. Sul luogo di Nichols, il luogo per $M = -3db$ è una curva oscillante tra un massimo (alla fase $\phi = 0(mod 2\pi)$, dove vale $|G(\jmath\omega)| \simeq 8db$), e un minimo (per fase $\phi = -\pi$, dove vale $|G(\jmath\omega)| \simeq -8db$). La curva a $M = -\gamma db$ è al di sotto o al di sopra di questa se $gamma$ è maggiore o minore di 3, mentre quella a $\gamma db$ è una curva chiusa che contiene il punto $(0db, \pi)$.

**F)** Il luogo ha 4 rami. Fa parte del luogo il semiasse reale a sinistra dello zero in $-0.9\gamma$. Oltre al semiasse reale negativo, vi sono due asintoti che formano un angolo di $\pm\pi/3$. Il centro degli asintoti è in $(0.9\gamma - 2\delta - 1.4\alpha)/3$. Se $\delta > 0.9\gamma > 0.7\alpha$, non si hanno biforcazioni; se $0.9\gamma > \delta > 0.7\alpha$ o se $0.9\gamma > 0.7\alpha > \delta$, si ha un punto di biforcazione sull'asse reale a sinistra di $-0.9\gamma$; se $\delta > 0.7\alpha > 0.9\gamma$ o se $0.7\alpha > \delta > 0.9\gamma >$, la biforcazione è tra $-0.7\alpha$ e $-\delta$. I tre casi $\delta > 0.9\gamma > 0.7\alpha$, $0.9\gamma > \delta > 0.7\alpha$, e $\delta > 0.7\alpha > 0.9\gamma$ sono illustrati sotto.




**G)** Per il criterio di Nyquist, poichè il sistema in anello aperto è asintoticamente stabile ed il luogo non circonda il punto $-1$, il sistema è stabile anche in anello chiuso. Il guadagno può essere aumentato di circa 1.5 e la fase ritardata sino a circa $35^o$, come si vede dal fatto che il luogo interseca l'asse reale negativo circa in 0.65 e il cerchio a modulo unitario a circa $-145^o$.

**H)** Fissiamo un controllore $C(s) = \frac{K}{s^t} C_0(s)$, con $C_0(0) = 1$. Le specifiche statiche impongono un guadagno $K$ tale che $\frac{1}{1+KG(0)} \leq 0.01$, cioè $K \geq 99/\alpha$, mentre non richiedono alcun integratore ($t = 0$). Scelta ad esempio $K = 100/\alpha$, il diagramma di Bode del sistema $KG(s)$ ha un contributo costante di $40db$, una coppia di poli complessi coniugati a pulsazione $\gamma$ a smorzamento 0.1 che danno luogo ad una pendenza di $-40db$ per decade alle pulsazioni alte. Il diagramma evidenzia uno scarso margine di fase ed una pulsazione di taglio di circa $10\gamma$, e quindi una scarsa banda passante. L'azione del controllore dinamico $C_0(s)$ dovrà quindi essere di tipo anticipativo. Uno zero posto in $-\gamma$ avrebbe l'effetto di spostare in avanti di una decade la pulsazione di taglio, e di attraversare l'asse a $0db$ con pendenza $-20db$ per decade, verificando così (almeno nel diagramma asintotico) le specifiche dinamiche. Per rendere il conmpensatore fisicamente realizzabile, si deve aggiungere un polo. Questo può essere posto in $-100\gamma$, così da avere un "ginocchio" tra pendenze -1 e -2 proprio nella pulsazione di taglio, ed un margine di fase di circa $45^o$.